

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ  
МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА імені О. М. БЕКЕТОВА**

**І. Т. Карпалюк**

**КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ**

з курсу

# **МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ І МЕТОДИ В ЕЛЕКТРОЕНЕРГЕТИЦІ**

*(для студентів 4 курсу денної та заочної форми навчання  
за напрямом 6.050701 – Електротехніка та електротехнології  
та слухачів другої вищої освіти за спеціальністю  
7.05070103 – Електротехнічні системи електроспоживання)*

**Харків  
ХНУМГ ім. О. М. Бекетова  
2015**

**Карпалюк І. Т.** Конспект лекцій з курсу «Математичні методи і моделі в електроенергетиці» (для студентів 4 курсу денної та заочної форми навчання за напрямом 6.050701 – Електротехніка та електротехнології та слухачів другої вищої освіти зі спеціальності 7.05070103 – Електротехнічні системи електроспоживання) / І. Т. Карпалюк; Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2015. – 182 с.

Укладач к.т.н., доц. І. Т. Карпалюк

Рецензент І. Г. Абраменко, кандидат технічних наук, доцент Харківського національного університету міського господарства імені О. М. Бекетова

*Затверджено кафедрою Електропостачання міст,  
протокол № 2 від 17.10.2014 р.*

## ЗМІСТ

<b>ВСТУП</b> .....	<b>7</b>
<b>1. СИСТЕМИ, СИСТЕМНИЙ ПІДХІД, СИСТЕМНИЙ АНАЛІЗ</b> .....	<b>9</b>
1.1 Цілісність і членимість.....	10
1.2 Принципи системного підходу.....	11
1.3 Системний аналіз.....	12
1.4 Структура системи.....	15
Контрольні питання:.....	16
<b>2. ДАНІ</b> .....	<b>17</b>
2.1 Рівні інформації. Дані.....	17
2.2 Поняття даних. Визначення, класифікація.....	17
2.3 Типи наборів даних.....	21
2.4 Бази даних. Основні положення.....	24
Контрольні питання:.....	27
<b>3. DATA MINING</b> .....	<b>28</b>
3.1 Data Mining – інтелектуальний аналіз даних.....	28
Information retrieval.....	33
Text Mining.....	33
Web Mining.....	33
3.2 Історичний екскурс Data Mining.....	34
3.3 Постановка задачі.....	34
3.4 Data mining і бази даних.....	35
3.5 Data mining і статистика.....	35
3.6 Data mining і штучний інтелект.....	36
Контрольні питання:.....	36
<b>4. DATA MINING (ПРОДОВЖЕННЯ)</b> .....	<b>37</b>
4.1 Класи систем Data Mining.....	37
4.1.1 Предметно-орієнтовані аналітичні системи.....	37
4.1.2 Статистичні пакети.....	38
4.1.3 Нейронні мережі.....	38
4.1.4 Системи міркувань на основі аналогічних випадків.....	39
4.1.5 Дерева рішень (decision trees).....	39
4.1.6 Еволюційне програмування.....	40
4.1.7 Генетичні алгоритми.....	41
4.1.1. Алгоритми обмеженого перебору.....	41
4.1.2. Системи для візуалізації багатовимірних даних.....	42
4.2 Висновок по лекції.....	43

Контрольні питання: .....	45
<b>5. МОДЕЛІ І МОДЕЛЮВАННЯ .....</b>	<b>46</b>
5.1 Моделювання і поняття моделі .....	46
5.2 Основні властивості будь-якої моделі: .....	46
5.3 Необхідність моделювання .....	47
5.4 Типи моделей .....	48
5.5 Процес побудови моделі .....	51
5.6 Загальні проблеми моделювання .....	54
Контрольні питання: .....	56
<b>6. ВИПАДКОВІ ПОДІЇ, ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ. ЇХ ЗАКОНИ РОЗПОДІЛУ І ЧИСЛОВІ ХАРАКТЕРИСТИКИ .....</b>	<b>57</b>
6.1 Поняття випадкової величини, визначення .....	57
6.2 Завдання дискретної випадкової величини .....	57
6.3 Інтегральна функція розподілу випадкової величини .....	58
6.4 Диференціальна функція розподілу випадкової величини .....	59
6.5 Числові характеристики випадкової величини .....	61
6.5.1 Математичне очікування випадкової величини .....	61
6.5.2 Дисперсія і середнє квадратичне відхилення .....	62
Дисперсія .....	62
Середнє квадратичне відхилення .....	62
6.6 Закон рівномірного розподілу вірогідності безперервної випадкової величини .....	62
6.7 Нормальний закон розподілу вірогідності безперервної випадкової величини .....	64
6.8 Показовий закон розподілу вірогідності безперервної випадкової величини .....	67
Контрольні питання: .....	68
<b>7. МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ МОДЕЛЮВАННЯ ПРИ ОБРОБЦІ ДАНИХ .....</b>	<b>69</b>
7.1 Інтерполяція функцій .....	69
7.2 Побудова інтерполяційного многочлена в явному вигляді .....	72
7.3 Інтерполяція по Лагранжу .....	72
7.4 Інтерполяція по Ньютону .....	74
7.5 Розділені різниці .....	74
Контрольні питання: .....	76
<b>8. СПЛАЙНИ. РАЦІОНАЛЬНА ІНТЕРПОЛЯЦІЯ .....</b>	<b>78</b>
8.1 Сплайн – інтерполяція .....	78

8.2	Монотонність функцій (допоміжне питання).....	79
8.3	Типи сплайнів.....	83
8.3.1	Лінійний сплайн .....	83
8.3.2	Сплайн Ерміта.....	83
8.3.3	Сплайн Катмулла-Рома.....	83
8.3.4	Кубічний сплайн.....	84
8.3.5	Сплайн Акими .....	84
8.4	Рациональна інтерполяція.....	87
	Контрольні питання:.....	87
<b>9.</b>	<b>ІНТЕРПОЛЯЦІЯ. АПРОКСИМАЦІЯ, ЗГЛАДЖУВАННЯ ДАНИХ, МЕТОД НАЙМЕНШИХ КВАДРАТІВ .....</b>	<b>88</b>
9.1	Апроксимація дослідних даних.....	88
9.2	Згладжування дослідних даних методом найменших квадрата .....	89
	Контрольні питання:.....	92
<b>10.</b>	<b>МЕТОДИ ЕКСТРАПОЛЮВАННЯ.....</b>	<b>93</b>
10.1	Метод експоненціального згладжування .....	95
10.2	Класифікація методів прогнозування. Оцінка точності прогнозу, побудованого методом екстраполяції .....	96
	Оцінка точності прогнозу, побудованого методом екстраполяції .....	98
	Середня абсолютна оцінка .....	98
	Середня квадратична оцінка .....	99
	Середня відносна помилка .....	99
10.3	Ковзна середня .....	99
	Просте ковзне середнє .....	100
	Зважене ковзне середнє .....	101
	Експоненціальне зважене ковзне середнє .....	101
	Експоненціальне ковзне середнє довільного порядку .....	102
	Модифіковане ковзне середнє .....	102
10.4	Вивчення сезонних коливань .....	102
	Контрольні питання:.....	106
<b>11.</b>	<b>РЕГРЕСІЯ. РІШЕННЯ В ПАКЕТІ MATHCAD.....</b>	<b>107</b>
11.1	Постановка завдання регресії .....	107
11.2	Лінійна регресія .....	109
11.3	Поліноміальна регресія .....	110
11.4	Нелінійна регресія .....	112
11.5	Згладжування даних .....	115
11.6	Прогноз залежностей.....	117

Контрольні питання: .....	117
<b>12. МОДЕЛЮВАННЯ ПРИ РІШЕННІ ІНЖЕНЕРНИХ ЗАВДАНЬ.....</b>	<b>118</b>
12.1 Класифікація моделей .....	118
12.2 Змінні в математичних моделях .....	119
12.3 Адекватність і ефективність математичних моделей .....	123
12.4 Властивості об'єктів моделювання .....	124
12.5 Математичні моделі на мікрорівні.....	127
12.6 Моделювання на макрорівні .....	128
12.7 Моделювання на метарівні .....	130
Контрольні питання .....	131
<b>13. ЛІНІЯ ЕЛЕКТРОПЕРЕДАЧІ .....</b>	<b>132</b>
13.1 Конструктивне виконання і властивості лінії електропередачі.....	132
13.2 Математична модель лінії з розподіленими параметрами .....	134
13.3 Математичні моделі лінії у вигляді схем заміщення .....	138
Режим холостого ходу .....	141
Режим передачі потужності менше натуральною.....	142
Режим передачі потужності більше натуральною .....	143
Спрощені моделі ЛЕП.....	145
Оцінка погрешностей двох спрощених математичних моделей ЛЕП ..	147
Контрольні питання .....	149
<b>14. СИЛОВИЙ ТРАНСФОРМАТОР .....</b>	<b>150</b>
14.1 Конструктивне виконання і принцип дії силового трансформатора...	150
14.2 Електричні і магнітні властивості і параметри силового трансформатора .....	153
14.3 Математичні моделі силового трансформатора .....	155
14.4 Г-подібна і П-подібна схеми заміщення силового трансформатора ...	157
14.5 Побудова зовнішньої характеристики трансформатора.....	160
Контрольні питання .....	165
<b>15. ЕЛЕКТРИЧНЕ НАВАНТАЖЕННЯ.....</b>	<b>166</b>
15.1 Статичні характеристики електричного навантаження.....	166
15.2 Моделювання електричних навантажень.....	170
Контрольні питання: .....	177
<b>ГЛОСАРІЙ.....</b>	<b>178</b>
<b>СПИСОК ДЖЕРЕЛ.....</b>	<b>180</b>

## ВСТУП

Пристрої використовувані в електроенергетиці ускладнюються з кожним роком, і їх стає все більше. Управляти великою кількістю учасників ланцюга: генератор – транспортування – споживач, дуже складно, при дотриманні жорстко регламентованих параметрів (напруга в мережі, частота струму, безперебійність і ін.). А якщо врахувати, що всі об'єкти електроенергетики сполучені в єдину мережу, то стає зрозуміло, що управління поведінкою параметрів такої мережі стає не простою завданням. У таких умовах без моделювання обійтися неможливо. Чим і обумовлена актуальність вивчення даної дисципліни.

Математичні моделі з'явилися разом з математикою багато століть назад. Величезний поштовх розвитку математичного моделювання додало появу ЕОМ. Застосування обчислювальних машин дозволило проаналізувати і застосувати на практиці багато математичних моделей, які раніше не піддавалися аналітичному дослідженню.

*Математична модель* — наближений опис об'єкту моделювання, виражений за допомогою математичної символіки.

Реалізована на комп'ютері математична модель називається *комп'ютерною математичною моделлю*, а проведення цілеспрямованих розрахунків за допомогою комп'ютерної моделі називається *обчислювальним експериментом*.

Всі сучасні технології використовують математичні моделі реалізовані в програмному забезпеченні. Без використання комп'ютерних моделей неможливе досягнення високих економічних і технічних параметрів.

Цілі моделювання можуть бути наступні:

- модель потрібна для того, щоб зрозуміти, як влаштований конкретний об'єкт, яка його структура, основні властивості, закони розвитку і взаємодії з навколишнім світом (розуміння);
- модель потрібна для того, щоб навчитися управляти об'єктом (або процесом) і визначити якнайкращі способи управління при заданих цілях і критеріях (управління);
- модель потрібна для того, щоб прогнозувати прямі і непрямі наслідки реалізації заданих способів і форм дії на об'єкт (прогнозування).

Створення моделі проводиться по етапах:

Перший етап — **визначення цілей моделювання**. Ці цілі можуть бути різними.

Другий етап: визначення вхідних і вихідних параметрів моделі.

Третій етап: побудова математичної моделі.

Четвертий етап: вибір методу дослідження математичної моделі.

П'ятий етап: розробка алгоритму, складання і налагодження програми для ЕОМ — процес, що важко формалізується.

Шостий етап: тестування програми.

Сьомий етап: власне обчислювальний експеримент, в процесі якого з'ясовується, чи відповідає модель реальному об'єкту (процесу).



# 1. СИСТЕМИ, СИСТЕМНИЙ ПІДХІД, СИСТЕМНИЙ АНАЛІЗ

Системи грають виняткову роль в житті будь-якого суспільства.

*Система* – це цілісна сукупність елементів будь-якого типу, взаємозв'язаних між собою, взаємодію яких забезпечує досягнення поставленої мети.

Таким чином, для системи характерна наявність:

- сукупності елементів;
- взаємозв'язки елементів через структуру;
- взаємодії;
- цілеспрямованості.

Розгляд системи включає:

- функціональний опис;
- морфологічний опис;
- інформаційний опис.

Функціональний і морфологічний опис системи не є взаємозамінними, вони взаємодоповнювані, зв'язок між ними встановлюється інформаційним описом.

Стикаючись з новим об'єктом, цікавляться перш за все його функцією. Отже, функціональний опис є первинним, що забезпечує усвідомлення важливості системи.

Функціональний опис виходить з того, що всяка система виконує які-небудь функції:

- просто існує;
- служить областю проживання іншої системи;
- обслуговує систему вищого порядку;
- є контрольною для деякого класу систем;
- служить засобом або початковим матеріалом для створення досконалішої системи і так далі.

Системи можуть бути однофункціональними і багатофункціональними.

Морфологічний опис системи дає уявлення про її будову.

Глибина опису визначається його призначенням. Вивчення морфології починається з елементного складу.

Основною властивістю системи є те, що вона володіє характеристиками, принципово відмінними від характеристик складових її елементів. Тільки інтеграційна взаємодія її елементів дозволяє системі досягати унікальних властивостей.

**Елемент системи** – це структурна одиниця системи, неналежна діленню в даних умовах розгляду системи.

Елемент – це така частина системи (підсистеми), всередину якого опис не проникає. Елементний склад може бути однорідним (гомогенним), різнорідним (гетерогенним) і змішаним.

Іноді елементний склад оцінити не вдається, і його вважають невизначеним. Важливою ознакою морфології є призначення (властивості) елементів.

Структурні властивості систем визначаються характером і стійкістю відносин між елементами. Структури можуть бути багатозв'язковими, ієрархічними і змішаними.

Композиційні властивості систем визначаються способом об'єднання елементів в підсистеми.

Інформаційний опис дає уявлення про організацію системи.

Інформація визначає передбаченість властивостей і поведінку об'єкту в часі. Чим вище рівень організації, ніж більше інформації, тим менш схильний об'єкт дії середовища.

Організованість, впорядкованість системи – це здатність зумовлювати свою перспективу, своє майбутнє. Зрозуміло, перспектива залежить від середовища.

Чим безладніша система, тим більше залежить її перспектива від випадкових чинників (внутрішніх і зовнішніх).

Внутрішня інформація системи є інформація самозбереження.

Щоб система діяла і взаємодіяла з середовищем, вона повинна споживати інформацію з середовища і повідомляти її середовищу.

Сукупність функціонального, морфологічного і інформаційного описів дозволяє відобразити головні властивості системи.

## **1.1 Цілісність і членимість**

Система – це цілісна сукупність елементів, що означає, з одного боку, що це цілісне утворення, а з іншого боку, що в її складі можуть бути виділені цілісні об'єкти – елементи. При цьому елементи існують лише в системі. Поза системою – це в кращому разі лише об'єкти з «системозначними» властивостями.

Звідси – відмінність між математично визначуваним множиною (як сукупністю елементів, де початковим є елемент) і системою (як сукупністю елементів, де первинною є властивість цілісності), тобто система – це єдине

ціле, таке, що складається з взаємодіючих частин, часто різноякісних, але одночасно сумісних.

**Зв'язок** – це наявність істотних стійких залежностей між елементами і (або) їх властивостями, що перевершують по потужності зв'язку цих елементів з іншими елементами, що не входять в дану систему. Ці зв'язки визначають інтеграційні властивості системи. Цим система відрізняється від простого конгломерату. Зв'язок – це канал, що забезпечує обмін між елементами системи і обмін системи з навколишнім середовищем (речовиною, енергією, інформацією).

Відношення – це вид зв'язку в абстрактній формі як відображення реальних фізичних зв'язків.

Організація – це властивість, що характеризує наявність організованості в системі, що знижує ступінь невизначеності системи.

При формуванні зв'язків з урахуванням організованості складається певна структура системи, а властивості елементів трансформуються у функції.

Інтеграційні якості – це якості, властиві системі в цілому, але не властиві жодному з її елементів окремо. Звідси вивід, що хоча властивості системи залежать від властивостей елементів, але не визначаються ними повністю, т.б.:

- система не зводиться до простій сукупності елементів;
- розділяючи систему на окремі частини, вивчаючи кожна з них окремо, не можна зрозуміти всі властивості системи в цілому.

Стан системи – це сукупність істотних властивостей (характеристик) системи, знання яких в сьогоденні (у момент часу  $t_0$ ) дозволяє визначити її поведінку в майбутньому ( $t > t_0$ ).

## **1.2 Принципи системного підходу**

Системний підхід – це конкретно-науковий метод діалектичної методології, що має загальнонаукове значення. Методологія вивчення системи як єдиного цілого, такого, що складається з окремих частин, з різних точок зору формалізації дозволяє сформулювати наступні принципи системного підходу.

Принцип кінцевої мети: абсолютний пріоритет кінцевої (глобальною) мети.

Принцип єдності: сумісний розгляд системи як цілого і як сукупності частин (елементів).

Принцип зв'язності: розгляд будь-якої частини сумісний з її зв'язками з оточенням.

Принцип модульної побудови: виділення модулів (підсистем) в системі і розгляд її як сукупність підсистем.

Принцип ієрархії: виділення ієрархії частин (елементів) і (або) їх ранжирування.

Принцип функціональності: сумісний розгляд структури і функцій з пріоритетом функцій над структурою.

Принцип розвитку: облік змінності системи, її здібності до розвитку, розширенню, заміні частин, накопиченню інформації.

Принцип децентралізації: поєднання в ухвалених рішеннях управління централізації і децентралізації.

Принцип невизначеності: облік невизначеностей і випадковостей в системі.

### **1.3 Системний аналіз**

Сукупність прийомів і методів для вивчення складних систем є системним аналізом. Системний аналіз – це засіб і технологія системного підходу.

Розглянемо основні етапи системного аналізу.

Постановка завдання. Вона включає:

- визначення об'єкту дослідження;
- постановку цілей;
- завдання критеріїв для вивчення об'єкту і управління ним.

Етап мало формалізований. Успіх постановки завдання визначається в основному мистецтвом і досвідом системного аналітика, глибиною розуміння ним поставленої проблеми.

Важливість етапу полягає в тому, що неправильна або неповна постановка завдання (цілей) може звести нанівець результати всього подальшого аналізу.

Структуризація і контур меж (декомпозиція) системи, що вивчається, включає:

- розбиття сукупності всіх об'єктів і процесів, що відповідають поставленій меті на два класи: власне досліджувану систему і зовнішнє середовище;
- вивчення процесів взаємодії об'єктів (елементів) системи і зовнішнього середовища.

Етап мало формалізований. Він заснований на мистецтві і досвіді провідних цей етап фахівців.

Розбиття об'єктів і процесів здійснюється в результаті послідовного перебору і включення в систему об'єктів і процесів, що роблять помітний вплив на процес досягнення поставленої мети.

При зміні цілей вивчення межі системи можуть бути змінені.

У ряді випадків можна при вивченні системи обмежитися лише впливом середовища на систему і нехтувати впливом системи на середовище. Отримуємо відкриту систему, поведінка якої залежить від вхідних сигналів, що поступають з середовища.

Завершення процесу первинної структуризації полягає в тому, що виділяються окремі складові частини – елементи системи, що вивчається, – а можливі зовнішні дії представляються у вигляді сукупності елементарних дій.

Складання моделі системи, що вивчається (як правило, математичною).

\* Параметризація – перший крок цього процесу. Здійснюється опис елементів системи і елементарних дій за допомогою тих або інших параметрів. Параметри можуть приймати як безперервні так і дискретні числові значення, а також значення у вигляді ознак, які не можуть бути охарактеризовані за допомогою звичайних числових параметрів, а розрізняються якісно (наприклад: теплий, холодний, поганий, хороший).

\* Встановлення різного роду залежностей між введеними параметрами. Характер цих залежностей може бути будь-яким. Кількісні (числові) параметри зв'язуються залежностями типу систем рівнянь (звичайній алгебрі або диференціальних). Якісні параметри зв'язуються залежностями типу таблиць. У загальному випадку можуть зустрічатися комбінації залежностей різних типів.

Залежності між параметрами в системах задаються в загальному випадку не простими формулами, а довільними алгоритмами з використанням будь-яких засобів як кількісних, так і описових.

Разом з цілком певними функціональними залежностями (однозначними функціями) в системах використовуються різного роду імовірнісні співвідношення. Не виключається можливість взаємопротилежних залежностей, які повинні супроводжуватися вагами, тобто оцінками ступеня упевненості в справедливості таких залежностей. За допомогою цих ваг суперечливі залежності переводяться в імовірнісні.

Сучасний системний аналіз, як правило, має справу з системами, що характеризуються великим числом (від сотень до сотень тисяч) параметрів різної природи. Залежності між ними є різноманітними і складними. Опис цих залежностей (тобто побудова математичної моделі системи) також вельми складно і громіздко. Отже, є потреба по можливості скоротити цей опис. Одним

з найбільш споживаних прийомів є розбиття системи, що вивчається, на підсистеми, виділення типових підсистем (з однаковим описом), встановлення ієрархії підсистем і стандартизації зв'язків підсистем на одних рівнях ієрархії з однотипними системами на інших рівнях. Системи такого роду прийнято називати великими або складними.

Виділення підсистем і встановлення їх ієрархії переслідує мета не тільки спрощення опису системи. Цей процес дає можливість здійснювати уточнення первинної структуризації (розбиття на елементи) і параметризації системи.

Результатом цього етапу є закінчена математична модель системи, описана на формальній мові.

Дослідження отриманої (побудованою) системи – четвертий етап системного аналізу.

\* Перше завдання етапу – прогноз розвитку системи, що вивчається.

Для вирішення цього завдання задають різні припущення про зовнішні дії на систему протягом даного періоду і за допомогою моделі визначають розподіл значень, що характеризують систему параметрів для будь-яких фіксованих моментів часу.

Термін “прогноз розвитку” підкреслює та обставина, що для системи не можна визначити єдину траєкторію розвитку, можна визначити лише безліч таких траєкторій. При цьому кожна траєкторія може реалізуватися насправді лише з тим або іншим ступенем вірогідності. Крім того, для складних систем не вдається знайти аналітичне рішення, що дозволяє описати поведінку системи в загальному вигляді. Тому користуються прямим (імітаційним) моделюванням системи, що вивчається, на ЕОМ. Вирішується завдання по кроках, відправляючись від початкових значень параметрів (якщо вони відомі) і задаючись певними кроками  $\Delta t$  за часом. Послідовно, крок за кроком, по заданих залежностях між параметрами визначають значення параметрів для моментів часу  $0, \Delta t, 2\Delta t, \dots$  і так далі.

Отримавши прогноз розвитку системи, що вивчається, проводять аналіз його результатів на відповідність заданим цілям і критеріям і виробляють пропозиції по поліпшенню управління і так далі, поки не вийде задовольняючий результат. У цьому полягає метод рішення задачі синтезу управління системою, званий методом «проб і помилок». Метод «проб і помилок» є не тільки основним, але в більшій своїй частині єдиною можливим. Але цей метод використовується, коли коштує завдання вироблення оптимального управління. У ряді випадків досить обмежитися лише прогнозом розвитку системи.

## 1.4 Структура системи

Під структурою системи розуміється організація системи з окремих елементів з їх взаємозв'язками, які визначаються розподілом функцій і цілей, що виконуються системою.

Структура – це спосіб організації цілого з складових частин.

Ефективність структури визначається якістю, значенням, формою і змістом її складових частин, а також місцем, який займають вони в цілому, і відносинами, що існують між ними.

По принципах управління і підлеглості розрізняють структури:

- централізовані;
- децентралізовані;
- змішані.

Децентралізована система: вирішення окремими елементами системи приймаються незалежно і не коректуються системою більш високого рівня.

Централізована система: завдання окремим елементам системи видаються лише одним елементом більш високого рівня.

У змішаній системі деякі функції або етапи виконуються по централізованій системі, а інші – по децентралізованій.

По числу рівнів ієрархії розрізняють системи:

- однорівневі;
- багаторівневі.

Багаторівневі можуть бути однорідними і неоднорідними.

По виконуваних функціях і цільовому призначенні розрізняють системи:

- фізичні;
- економічні;
- біологічні;
- суспільні;
- інформаційні і так далі

Залежно від числа елементів системи і зв'язків між ними розрізняють системи фіксованої (жорсткою) і змінної (керованою або змінною) структури.

Основні характеристики структури систем можуть бути розбиті на дві групи:

характеристики, пов'язані з ієрархічністю систем: число рівнів (підсистем), характер взаємозв'язків між рівнями, ступінь централізації і децентралізації в управлінні, ознаки розбиття системи на підсистеми;

характеристики ефективності функціонування системи тієї або іншої структури: вартісна ефективність, надійність, живучість, швидкодія і пропускна спроможність, здібність до перебудови.

Безліч всіх вищестоящих і підлеглих підсистем по відношенню до даної називається вертикаллюю.

Інформаційні зв'язки між системами різних рівнів прийнято називати вертикальними, а між підсистемами одного рівня – горизонтальними.

Важливими характеристиками системи є:

ступінь централізації;

норма керованості.

Ступінь централізації для двох суміжних рівнів оцінюється відношенням

$$\alpha_i = \frac{i}{i-1}$$

де  $\alpha_i$  – об'єм завдань відповідного  $i$  рівня (оцінюється кількістю інформації, що переробляється).

Система в цілому оцінюється ступенем керованості

$$\alpha = \sum_{i=1}^N \beta_i \alpha_i$$

де  $\beta_i$  – вагові коефіцієнти.

Норма керованості характеризує об'єм завдань, вирішенням яких може ефективно управляти керівник.

### **Контрольні питання:**

1. Поняття система (розкрити поняття, привести описи систем).
2. Розкрити такі описи системи як: функціональне; морфологічне; інформаційне.
3. Елемент системи.
4. Поняття зв'язку між елементами
5. Сформулюйте принципи системного підходу
6. Що під собою має на увазі системний аналіз (основні етапи системного аналізу)
7. Структура системи (розкрийте поняття)
8. Що мають на увазі під поняттями: централізована система, децентралізована система?
9. Багаторівневність системи.
10. Ділення систем по функціях і цільовому призначенні.



## 2. ДАНІ

### 2.1 Рівні інформації. Дані

Не вся інформація однаково корисна. Іноді для пояснення якогось поняття необхідно написати багато тексту, а іноді для пояснення складних питань досить подивитися на просту діаграму. Для скорочення надмірності інформації були придумані математичні формули, креслення, умовні позначення, програмний код і так далі

В процесі розвитку інформаційних технологій, а також систем збору і зберігання даних — баз даних (databases), сховищ даних (data warehousing), і з недавніх пір, хмарних репозиторіїв, виникла проблема аналізу великих об'ємів даних, коли аналітик або управлінець не в змозі уручну обробити великі масиви даних і ухвалити рішення. Необхідно представити початкову інформацію в компактнішому вигляді, з якою може справитися людський мозок за прийнятний час.

Рівні інформації:

- початкові дані (сирі дані, історичні дані або просто дані) – необроблені масиви даних, отримувані в результаті спостереження за якоїсь динамічною системою або об'єктом і що відображають його стан в конкретні моменти часу;
- інформація – оброблені дані, які несуть в собі якусь інформаційну цінність для користувача; сирі дані, представлені в компактнішому вигляді (наприклад, результати пошуку);
- знання — несуть в собі якесь ноу-хау, відображають приховані взаємозв'язки межу об'єктами, які не є загальнодоступними (інакше, це буде просто інформація); дані з великою ентропією (або мірою невизначеності).

### 2.2 Поняття даних. Визначення, класифікація

У широкому розумінні даними є факти, текст, графіки, картинки, звуки, аналогові або цифрові відео-сегменти.

Дані можуть бути отримані в результаті вимірювань, експериментів, арифметичних і логічних операцій.

Дані повинні бути представлені у формі, придатній для зберігання, передачі і обробки.

Дані – це необроблений матеріал, що надається постачальниками даних і використовуваний споживачами для формування інформації на основі даних.

### ***Набір даних і їх атрибутів***

На рисунку представлена двомірна таблиця, що є набором даних.

<b>Об'єкт</b>	<b>Атрибут</b>	<b>Значення</b>
яблуко	Вид	Макентош
яблуко	Колір	Червоний
яблуко	Кількість	100
апельсин	Вид	Valencia
апельсин	Колір	Оранжевий
апельсин	Кількість	200

Рисунок 2.1 – Двомірна таблиця, що є набором даних

Об'єкт описується як набір атрибутів.

Атрибут - властивість, що характеризує об'єкт.

Наприклад: колір очей людини, температура води і так далі

Атрибут також називають змінною, полемо таблиці, вимірюванням, характеристикою.

Змінна (variable) – властивість або характеристика, загальна для всіх об'єктів, що вивчаються, прояв якої може змінюватися від об'єкту до об'єкту.

Значення (value) змінної є проявом ознаки.

Вивчення дуже великих об'ємів даних є дорогим процесом, що вимагає великих тимчасових витрат, а також неминуче приводить до помилок, пов'язаних з людським чинником.

Цілком досить розглянути деяку частину всієї сукупності, тобто вибірку, і отримати інформацію, що цікавить нас, на її підставі.

Проте розмір вибірки повинен залежати від різноманітності об'єктів, представлених в генеральній сукупності. У вибірці повинні бути представлені різні комбінації і елементи генеральної сукупності.

Генеральна сукупність (population) – вся сукупність об'єктів, що вивчаються, що цікавить дослідника.

Вибірка (sample) – частина генеральної сукупності, певним способом відібрана з метою дослідження і отримання висновків про властивості і характеристики генеральної сукупності.

Параметри – числові характеристики генеральної сукупності.

Статистики – числові характеристики вибірки.

Часто дослідження ґрунтуються на гіпотезах. Гіпотези перевіряються за допомогою даних. Гіпотеза – припущення щодо параметрів сукупності об'єктів, яке повинне бути перевірене на її частині.

Гіпотеза – частково обґрунтована закономірність знань, службовка або для зв'язку між різними емпіричними фактами, або для пояснення факту або групи фактів.

Вимірювання – процес привласнення чисел характеристикам об'єктів, що вивчаються, згідно певному правилу.

В процесі підготовки даних вимірюється не сам об'єкт, а його характеристики.

Змінні можуть бути *числовими* даними або *символьними*.

Числові дані, у свою чергу, можуть бути дискретними і безперервними.

Дискретні дані є значеннями ознаки, загальне число яких звичайно або нескінченно, але може бути підраховано за допомогою натуральних чисел від одного до безкінечності.

Приклад дискретних даних. Тривалість маршруту тролейбуса (кількість варіантів тривалості кінцева): 10, 15, 25 мін.

Безперервні дані – дані, значення яких можуть приймати яке бажане значення в деякому інтервалі. Вимірювання безперервних даних припускає велику точність.

Приклад безперервних даних: температура, висота, вага, довжина і так далі.

### ***Шкали***

Шкала – правило, відповідно до яким об'єктам привласнюються числа.

Існує п'ять типів шкал вимірювань: номінальна, порядкова, інтервальна, відносна і дихотомічна.

Номінальна шкала (nominal scale) – шкала, що містить тільки категорії; дані в ній не можуть упорядковуватися, з ними не можуть бути проведені ніякі арифметичні дії.

Номінальна шкала складається з назв, категорій, імен для класифікації і сортування об'єктів або спостережень за деякою ознакою.

Приклад такої шкали: професії, місто мешкання, сімейний стан.

Для цієї шкали застосовні тільки такі операції: рівно (=), не рівно (M).

Порядкова шкала (ordinal scale) – шкала, в якій числа привласнюють об'єктам для позначення відносної позиції об'єктів, але не величини відмінностей між ними.

Шкала вимірювань дає можливість ранжирувати значення змінних. Вимірювання ж в порядковій шкалі містять інформацію тільки про порядок проходження величин, але не дозволяють сказати "наскільки одна величина більше іншої", або "наскільки вона менше іншої".

Приклад такої шкали: місце (1, 2, 3-й), яке команда отримала на змаганнях, номер студента в рейтингу успішності (1-й, 23-й, і так далі), при цьому невідомо, наскільки один студент успішніший за інше, відомий лише його номер в рейтингу.

Для цієї шкали застосовні тільки такі операції: рівно (=), не рівно ( $\neq$ ), більше (>), менше (<).

Інтервальна шкала (interval scale) – шкала, різниці між значеннями якої можуть бути обчислені, проте їх відносини не мають сенсу.

Ця шкала дозволяє знаходити різницю між двома величинами, володіє властивостями номінальної і порядкової шкал, а також дозволяє визначити кількісну зміну ознаки.

Приклад такої шкали: температура води в морі вранці – 19 градусів, увечері – 24, тобто вечірня на 5 градусів вище, але не можна сказати, що вона в 1,26 разів вище.

Номінальна і порядкова шкали є дискретними, а інтервальна шкала – безперервною, вона дозволяє здійснювати точні вимірювання ознаки і проводити арифметичні операції складання, віднімання, множення, ділення.

Для цієї шкали застосовні тільки такі операції: рівно (=), не рівно ( $\neq$ ), більше (>), менше (<), операції складання (+) і віднімання (-).

Відносна шкала (ratio scale) – шкала, в якій є певна точка відліку і можливі відношення між значеннями шкали.

Приклад такої шкали: ціна на картоплю в супермаркеті вище в 1,2 разу, чим ціна на базарі.

Відносні і інтервальні шкали є числовими.

Для цієї шкали застосовні тільки такі операції: рівно (=), не рівно ( $\neq$ ), більше (>), менше (<), операції складання (+) і віднімання (-), множення (\*) і ділення (/).

Дихотомічна шкала (dichotomous scale) – шкала, що містить тільки дві категорії.

Приклад такої шкали: пів (чоловічий і жіночий).

Виводи. У цій частині лекції ми розглянули поняття даних, об'єкту і атрибуту, їх характеристики. Також ми обговорили типи шкал. Номінальна шкала описує об'єкти або спостереження в термінах якісних ознак. На один

крок далі йдуть порядкові шкали, що дозволяють упорядковувати спостереження або об'єкти по певній характеристиці.

Інтервальні і відносні шкали складніші, в них можливе визначення кількісного значення ознаки.

## 2.3 Типи наборів даних

Виділятимемо наступні типи даних:

- дані, що складаються із записів
- табличні дані
- транзакційні дані
- графічні дані
- хімічні дані

Дані, що складаються із записів. Найбільш дані, що часто зустрічаються, – дані, що складаються із записів (record data).

Приклади таких наборів даних: табличні дані, матричні дані, документальні дані, транзакційні або операційні.

Табличні дані – дані, що складаються із записів, кожна з яких складається з фіксованого набору атрибутів.

Транзакційні дані є особливим типом даних, де кожен запис, що є транзакцією, включає набір значень.

Приклад транзакційної бази даних, що містить перелік покупок клієнтів магазину, приведений на рисунку.

ІД	Найменування
1	Вода, сік, молоко
2	Пиво, вода
3	Пиво, сік, молоко, квас
...	...

Рисунок 2.2 – Приклад транзакційних даних

Графічні дані. Приклади графічних даних: WWW-дані; молекулярні структури; графи

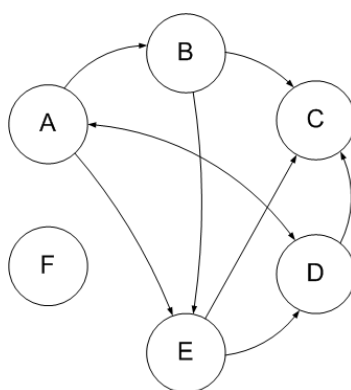


Рисунок 2.3 – Приклад графа

За допомогою карт, наприклад, можна відстежити зміни об'єктів в часі і просторі, визначити характер їх розподілу на площині або в просторі. Перевагою графічного представлення даних є велика простота їх сприйняття, чим, наприклад, табличних даних. Приклад карти, картою Кохонена, що є, представлений на рисунку.

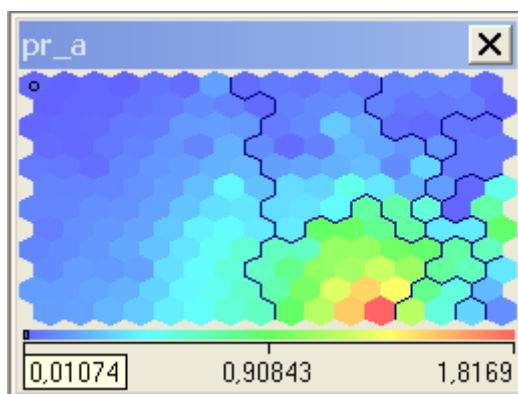


Рисунок 2.4 – Приклад даних типу "Карта Кохонена"

Хімічні дані. Хімічні дані є особливим типом даних. Приклад таких даних: Benzene Molecule:  $C_6H_6$

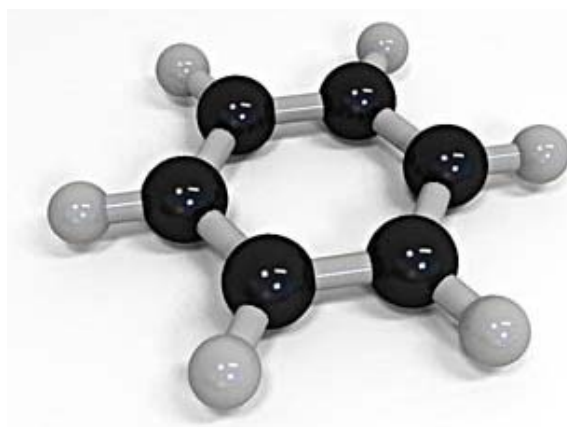


Рисунок 2.5 – Приклад хімічних даних

Згідно опиту на сайті Kdnuggets, найбільше число опитаних аналізує дані з "плоских" таблиць (26%), реляційних таблиць (24%), далі йдуть тимчасові ряди (14%) і дані у вигляді тексту (11%), решта аналізованих типів даних в порядку убутання: web-контенти, XML, графіка, аудіо, відео і ін.

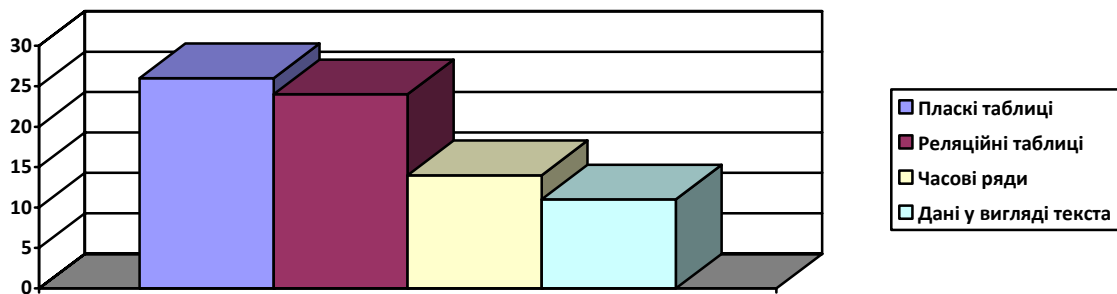


Рисунок 2.6. –Розподіл типів даних

### Формати зберігання даних

Можливі чотири аспекти роботи з даними: визначення даних, обчислення, маніпулювання і обробка (збір, передача і ін.).

При маніпулюванні даними використовується структура даних типу "файл". Файли можуть мати різні формати. Найбільш поширені формати, представлені на рисунку.

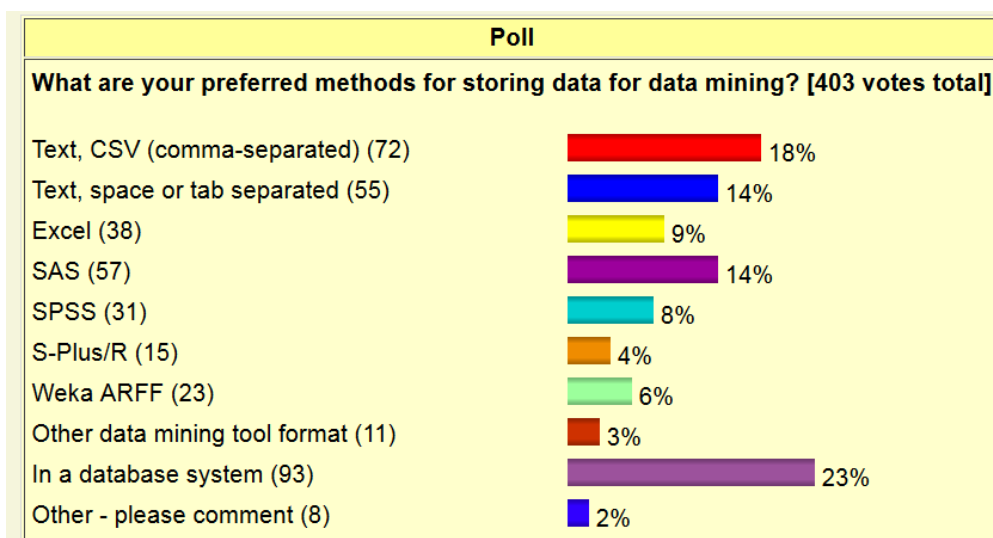


Рисунок 2.7 – Найбільш поширені формати зберігання даних

Найбільше число опитаних (23%) вважають за краще зберігати дані у форматі тієї бази даних, якої смороду використовують. У форматі Text, CSV – 18%, по 14% опитаних зберігають дані у форматі Text, space or tab separated і SAS; у форматі Excel – 9%, SPSS -8%, S-Plus/R – 4%, Weka ARFF – 6%, в інших форматах – 2%.

За результатами опитувань, найбільш поширеним форматом зберігання даних виступають бази даних.

## 2.4 Бази даних. Основні положення

Для розуміння організації даних в базі даних необхідне знання основних положень теорії баз даних. Розглянемо деякі положення цієї теорії.

База даних (Database) – це особливим чином організовані і такі, що зберігаються в електронному вигляді дані.

Також така організація даних передбачає полегшити їх пошук і доступ до них для одного або декількох застосувань і наявність мінімальної надмірності даних.

Метою створення баз даних є побудова такої системи даних, яка б не залежала від програмного забезпечення, вживаних технічних засобів і фізичного розташування даних в ЕОМ. Побудова такої системи даних повинна забезпечувати несуперечливу і цілісну інформацію.

База даних в простому випадку представляється у вигляді системи двовимірних таблиць.

### *Системі управління базами даних (СУБД)*

Система управління базою даних – це програмне забезпечення, контролююче організацію, зберігання, цілісність, внесення змін, читання і безпеку інформації у базі даних.

Система управління *реляційними базами даних* (Relational Database Management System) – це СУБД, заснована на реляційній моделі даних.

У реляційній моделі даних будь-яке представлення даних зводиться до сукупності реляційних таблиць (двовимірних таблиць особливого типу).

Програмні засоби СУБД включають систему управління, що забезпечує введення-виведення, обробку і зберігання інформації, створення, модифікацію і тестування бази даних. Внутрішніми мовами програмування СУБД є мови четвертого покоління (C, C++, Pascal, Object Pascal). За допомогою мов БД створюються додатки, бази даних і інтерфейс користувача, що включає екранні форми, меню, звіти.



До баз даних, а також до СУБД пред'являються такі вимоги:

1. Висока швидкодія;
2. Простота оновлення даних;
3. Незалежність даних;
4. Можливість мультикористувацького використання даних;
5. Безпека даних;
6. Стандартизація побудови і експлуатації БД;
7. Адекватність відображення даних відповідної наочної області;
8. Доброзичливий інтерфейс користувача.

Високу швидкодію передбачає малий година відгуку, тобто малий проміжок годині від моменту запиту до бази даних до моменту реального отримання даних.

Незалежність даних – це можливість зміни логічної і фізичної структури бази даних без зміни уявлень користувачів.

Безпека даних – це захист даних від навмисного або ненавмисного порушення секретності, спотворення або руйнування. Безпеку включає два компоненти: цілісність і захист даних від несанкціонованого доступу.

\* Цілісність даних – стійкість даних, що зберігаються, до руйнування і знищення, пов'язаним з несправностями технічних засобів, системними помилками і помилковими діями користувачів.

Цілісність даних припускає:

- відсутність неточно введених даних, захист від помилок при оновленні баз даних;
- неможливість видалення зв'язаних даних різних таблиць;
- збереження даних при збоях техніки і ін.

\* Захист даних від несанкціонованого доступу припускає обмеження доступу до певних даних бази і досягається введенням мерів безпеки: розмежування має рацію доступу до даним різних користувачів поклад від виконуваних ними функцій і/або посадових обов'язків; введенням захисту у вигляді паролів.

Стандартизація забезпечує спадкоємність поколінь конкретної СУБД, спрощує взаємодію баз даних одного покоління СУБД з однаковими і різними моделями даних.

### ***Класифікація видів даних***

Якими можуть бути дані? Нижче наведено декілька класифікацій.

Реляційні дані – це дані з реляційних баз (таблиць).

Багатовимірні дані – це дані, представлені в кубах OLAP.

Відмірювання (dimension) або вісь – в багатовимірних даних – це збори даних одного і того ж типу, що дозволяє структурувати багатовимірну базу даних.

По критерію постійності своїх значень в ході рішення задачі дані можуть бути:

- змінними;
- постійними;
- умовно-постійними.

Змінні дані – це такі дані, які змінюють свої значення в процесі рішення задачі.

Постійні дані - це такі дані, які зберігають свої значення в процесі рішення задачі (математичні константи, координати нерухомих об'єктів) і не залежать від зовнішніх чинників.

Умовно-постійні дані - це такі дані, які можуть іноді змінювати свої значення, але ці зміни не залежать від процесу рішення задачі, а визначаються зовнішніми чинниками.

Дані, поклад від тихий функцій, які сморід виконують, можуть бути **довідковими, оперативними, архівними**.

Слід розрізняти дані за період і точкові дані. Ці відмінності важливі при проектуванні системи збору інформації, а також в процесі вимірювань.

- дані за період;
- точкові дані.

Дані за період характеризують деякий період годині. Прикладом даних за період можуть бути: прибуток підприємства за місяць, середня температура за місяць.

Точкові дані представляють значення деякої змінної в конкретний момент годині. Приклад точкових даних: залишок на рахунку на перше число місяця, температура у вісім годинників ранку.

Дані бувають первинними і вторинними. Вторинні дані - це дані, які є результатом певних обчислень, застосованих до первинних даних.

### ***Метадані***

Метадані (Metadata) – це дані про даних.

До складу метаданих можуть входити: каталоги, довідники, реєстри.

Метадані містять зведення про склад даних, змісті, статусі, походженні, місцезнаходженні, якості, форматах і формах уявлення, умовах доступу, придбання і використання, авторських, майнових і суміжних з ними правах на дані і ін.

**Висновок.** У лекції були розглянуті поняття даних, об'єктів і атрибутів їх характеристики, типи шкал, поняття набору даних і його типи. Описані можливі формати зберігання даних. Введені поняття бази даних, системи управління базами даних, метаданих

### **Контрольні питання:**

1. Рівні інформації.
2. Дані, поняття даних
3. Атрибуті даних
4. Що мають на увазі під гіпотезою? Привести приклади
5. Шкали. Описані типи шкал: номінальна, порядкова інтервальна, відносна, дихотомічна
6. Типи наборів даних: запис; табличні дані; транзакційні дані; графічні дані; хімічні дані
7. Які формати зберігання даних ви знаєте? Відсортуйте по частоті використання
8. Що таке база даних?
9. Які вимоги пред'являються до СУБД?
10. Класифікація видів даних. По критерію постійності: змінні; постійні; умовно-постійні.
11. Які дані можна включати в метадані?

## 3. DATA MINING

### 3.1 Data Mining – інтелектуальний аналіз даних

У зв'язку з вдосконаленням технологій запису і зберігання даних на людей обрушилися колосальні інформаційні потоки в самих різних областях. Стало ясно, що без продуктивної переробки потоки сирих даних утворюють нікому не потрібне звалище.

Специфіка сучасних вимог до переробки інформації наступна:

- Дані мають необмежений об'єм;
- Дані є різномірними (кількісними, якісними, текстовими);
- Результати повинні бути конкретні і зрозумілі;
- Інструменти для обробки сирих даних повинні бути прості у використанні.

Традиційна математична статистика, не справляється повною мірою із завданням переробки інформації. Головна причина — **концепція усереднювання по вибірці**, що приводить до операцій над фіктивними величинами (типу середньої температури пацієнтів по лікарні, середньої висоти будинку на вулиці і тому подібне). Методи математичної статистики виявилися корисними головним чином для перевірки заздалегідь сформульованих гіпотез (verification-driven data mining) і для “грубого” розвідувального аналізу, що становить основу оперативної аналітичної обробки даних (online analytical processing, OLAP).

Термін Data Mining отримав свою назву з двох понять: пошуку цінної інформації у великій базі даних (data) і здобичі гірської руди (mining).

Термін Data Mining часто переводиться як здобич даних, витягання інформації, розкопка даних, інтелектуальний аналіз даних, засоби пошуку закономірностей, витягання знань, аналіз шаблонів.

Поняття "Виявлення знань в базах даних" (Knowledge Discovery in Databases, KDD) можна вважати синонімом Data Mining.

Методи Data Mining (або, що те ж саме, Knowledge Discovery In Data, скорочено, KDD) лежать на стику баз даних, статистики і штучного інтелекту.

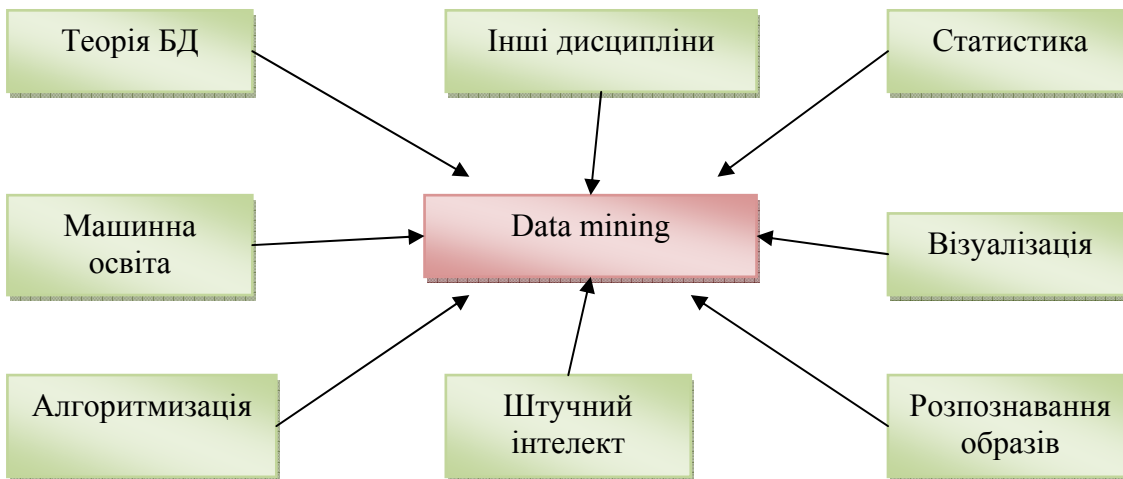


Рисунок 3.1. – Data mining як мультидисциплінарна область

Приведемо короткий опис деяких дисциплін, на стику яких з'явилася технологія Data Mining.

#### ***Поняття Статистики***

Статистика - це наука про методи збору даних, їх обробки і аналізу для виявлення закономірностей, властивих явищу, що вивчається.

Статистика є сукупністю методів планування експерименту, збору даних, їх уявлення і узагальнення, а також аналізу і отримання висновків на підставі цих даних.

Статистика оперує даними, отриманими в результаті спостережень або експериментів.

#### ***Поняття Машинного навчання***

Єдиного визначення машинного навчання на сьогоднішній день немає. Машинне навчання можна охарактеризувати як процес отримання програмою нових знань. Мітчелл в 1996 році дав таке визначення: "Машинне навчання - це наука, яка вивчає комп'ютерні алгоритми, що автоматично поліпшуються під час роботи". Одним з найбільш популярних прикладів алгоритму машинного навчання є нейронні мережі.

#### ***Поняття Штучного інтелекту***

Штучний інтелект - науковий напрям, в рамках якого ставляться і вирішуються завдання апаратного або програмного моделювання видів людської діяльності, що традиційно вважаються інтелектуальними.

Термін інтелект (intelligence) походить від латинського intellectus, що означає розум, розумові здібності людини.

Відповідно, штучний інтелект (AI, Artificial Intelligence) тлумачиться як властивість автоматичних систем брати на себе окремі функції інтелекту людини.

Штучним інтелектом називають властивість інтелектуальних систем виконувати творчі функції, які традиційно вважаються прерогативою людини.

Кожен з напрямів, Data Mining, що сформували, має свої особливості. Проведемо порівняння з деякими з них.

Порівняння статистики, машинного навчання і Data Mining

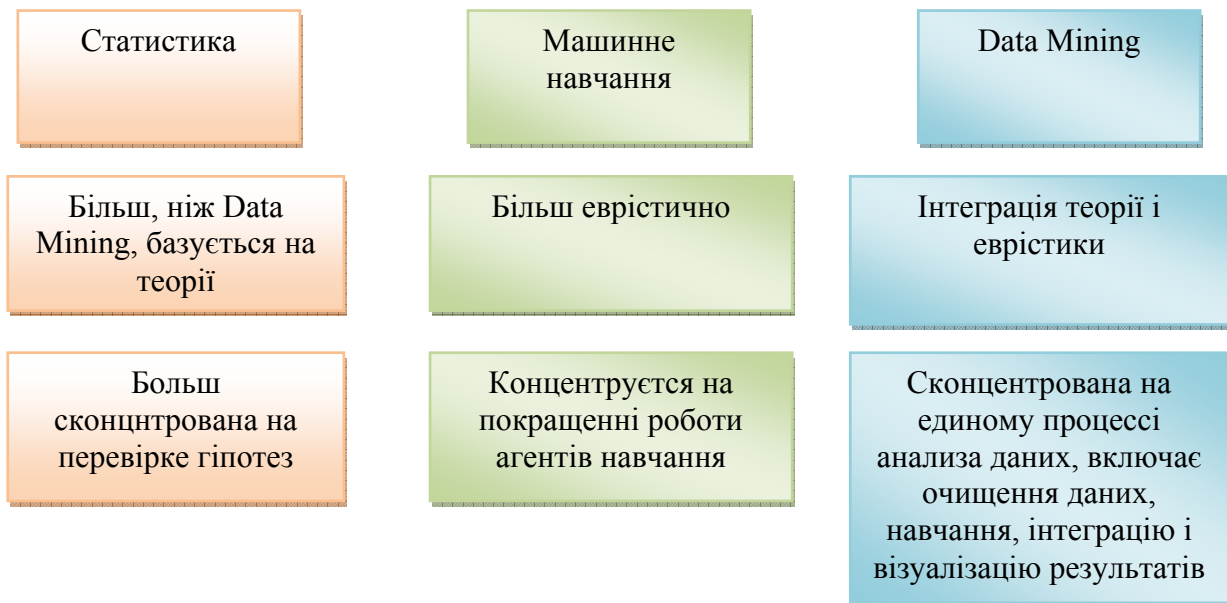


Рисунок 3.2. – Порівняння статистики, машинного навчання і Data Mining

Поняття Data Mining близько пов'язане з технологіями баз даних.

### ***Поняття Data Mining***

Data Mining - це процес підтримки ухвалення рішень, заснований на пошуку в даних прихованих закономірностей (шаблонів інформації).

Технологію Data Mining достатньо точно визначає Григорій Патецький-Шапіро (Gregory Piatetsky-Shapiro) – один із засновників цього напрямку:

Data Mining- це процес виявлення в сирих даних раніше невідомих, нетривіальних, практично корисних і доступних інтерпретації знань, необхідних для ухвалення рішень в різних сферах людської діяльності.

Приведемо ще декілька визначень поняття Data Mining. Data Mining- це процес виділення з даних неявної і неструктурованої інформації і представлення її у вигляді, придатному для використання.

Data Mining- це процес виділення, дослідження і моделювання великих об'ємів даних для виявлення невідомих до цього структур (patterns) з метою досягнення переваг в бізнесі (визначення SAS Institute).

Data Mining- це процес, мета якого – виявити нові значущі кореляції, зразки і тенденції в результаті просіювання великого об'єму даних, що зберігаються, з використанням методик розпізнавання зразків плюс застосування статистичних і математичних методів (визначення Gartner Group).

Суть і мету технології Data Mining можна охарактеризувати так: це технологія, яка призначена для пошуку у великих об'ємах даних неочевидних, об'єктивних і корисних на практиці закономірностей.

Неочевидних - це означає, що знайдені закономірності не виявляються стандартними методами обробки інформації або експертним шляхом.

Об'єктивних - це означає, що виявлені закономірності повністю відповідають дійсності, на відміну від експертної думки, яка завжди є суб'єктивною.

Практично корисних - це означає, що виводи мають конкретне значення, якому можна знайти практичне застосування.

Знання - сукупність відомостей, яка утворює цілісний опис, відповідний деякому рівню обізнаності про описуване питання, предмет, проблемі і так далі

Використання знань (knowledge deployment) означає дійсне застосування знайдених знань для досягнення конкретних переваг.

У основу технології Data Mining покладена концепція шаблонів (patterns), які є закономірностями, властивими під вибіркाम даних, які можуть бути виражені у формі, зрозумілій людині.

"Mining" по-англійськи означає "видобуток корисних копалин", а пошук закономірностей у величезній кількості даних дійсно схожий на цей процес.

Мета пошуку закономірностей – представлення даних у вигляді, що відображає шукані процеси. Побудова моделей прогнозування також є метою пошуку закономірностей

Важливе положення Data Mining — не тривіальність розшукуваних шаблонів. Це означає, що знайдені шаблони повинні відображати неочевидні, несподівані (unexpected) регулярності в даних, такі, що становлять так звані приховані знання (hidden knowledge).

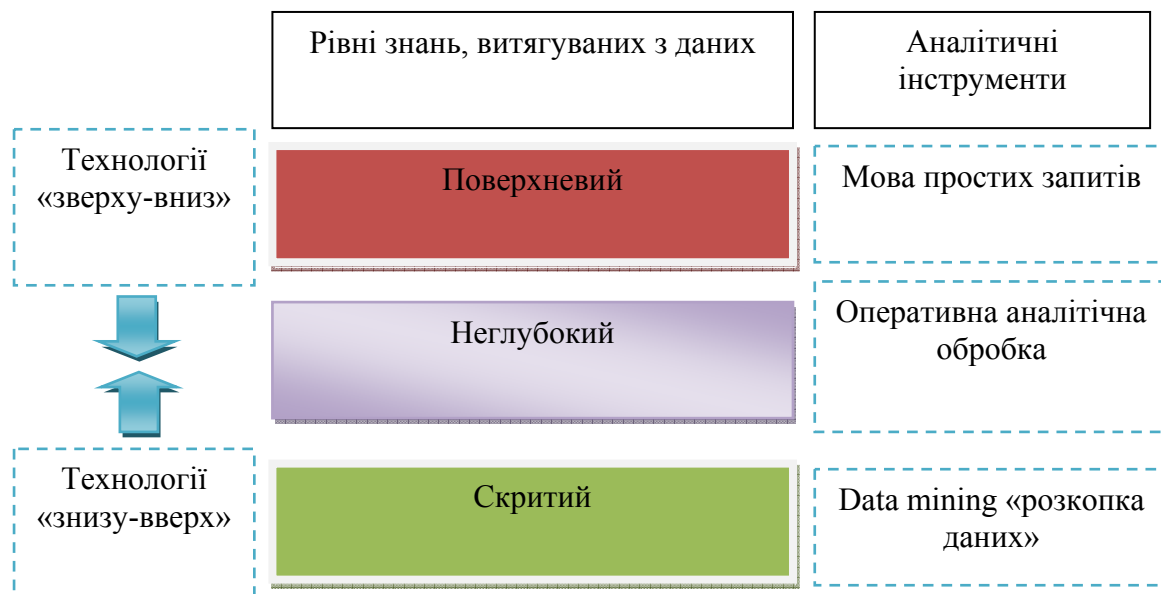


Рисунок 3.3 – Рівні знань, витягваних з даних

Історично склалося, що у терміну Data Mining є декілька варіантів перекладу (і значень):

- витягання, збір даних, здобич даних (ще використовують Information Retrieval або IR);
- витягання знань, інтелектуальний аналіз даних (Knowledge Data Discovery або KDD, Business Intelligence).

Найчастіше витягання даних (збір) є підготовчим етапом для витягання знань (аналіз).

Завдання, вирішувані Data Mining:

- Класифікація — віднесення вхідного вектора (об'єкту, події, спостереження) до одного із заздалегідь відомих класів.
- Кластеризація — розділення безлічі вхідних векторів на групи (кластери) по ступеню «схожості» один на одного.
- Скорочення опису — для візуалізації даних, спрощення рахунку і інтерпретації, стиснення об'ємів збираної інформації, що зберігається.
- Асоціація — пошук зразків, що повторюються. Наприклад, пошук «стійких зв'язків в корзині покупця».
- Прогнозування – знаходження майбутніх станів об'єкту на підставі попередніх станів (історичних даних).
- Аналіз відхилень — наприклад, виявлення нетипової мережевої активності дозволяє виявити шкідливі програми.
- Візуалізація даних.



## Information retrieval

Information retrieval використовується для отримання структурованих даних або репрезентативної вибірки меншого розміру. Information retrieval оперує даними першого рівня, а в результаті видає інформацію другого рівня.

Найпростішим прикладом information retrieval є пошукова система, яка на підставі якихось алгоритмів виводить частину інформації з повного набору документів. Крім того, будь-яка система, яка працює з тестовими даними, метаінформацій або базами даних тим або іншим способом використовує інструменти information retrieval. Інструментами можуть виступати методи індексації, фільтрації, сортування даних і так далі.

## Text Mining

Інші назви: text data mining, text analysis, дуже близьке поняття – concern mining.

Text mining може працювати як з сирими даними, так і з частково обробленими, але на відміну від information retrieval, text mining аналізує текстову інформацію за допомогою математичних методів, що дозволяє отримувати результат з елементами знання.

Завдання, які вирішує text mining: знаходження шаблонів даних, отримання структурованої інформації, побудова ієрархій об'єктів, класифікація і кластеризація даних, визначення тематики або області знань, автоматичне реферування документів, завдання автоматичної фільтрації контенту, визначення семантичних зв'язків та інші.

Для вирішення завдань text mining використовують статистичні методи, методи інтерполяції, апроксимації і екстраполяції, нечіткі методи, методи контент-аналіза.

## Web Mining

web mining – набір підходів і техніки для витягання даних з веб-ресурсів.

Оскільки веб-джерела, як правило, не є текстовими даними, то і підходи до процесу витягання даних відрізняються в цьому випадку. Інформація у WEB зберігається у вигляді спеціальної мови розмітки HTML (хоча є і інші формати – RSS, Atom, SOAP), веб-сторінки можуть мати додаткову метаінформацію, а також інформацію про структуру (семантиці) документа, кожен веб-сервер-документ знаходиться усередині якогось домена і до нього можуть застосовуватися правила пошукової оптимізації (SEO).

Для вирішення вищеописаних завдань використовуються різні методи і алгоритми Data Mining. З огляду на те, що Data Mining розвивалася і розвивається на стику таких дисциплін, як статистика, теорія інформації, машинне навчання, теорія баз даних. Більшість алгоритмів і методів Data Mining були розроблені на основі різних методів з цих дисциплін. Наприклад, процедура кластеризації k-means була просто запозичена із статистики. Велику популярність отримали наступні методи Data Mining: нейронні мережі, дерева рішень, алгоритми кластеризації, у тому числі і масштабовані, алгоритми виявлення асоціативних зв'язків між подіями і так далі.

## 3.2 Історичний екскурс Data Mining

Область Data Mining почалася з семінару (англ. workshop), проведеного Григорієм Патецьким-Шапіро в 1989 році.  
[http://ru.wikipedia.org/wiki/Data\\_mining – cite\\_note-comp-0](http://ru.wikipedia.org/wiki/Data_mining – cite_note-comp-0)

Раніше, працюючи в компанії GTE Labs, Григорій Патецький-Шапіро зацікавився питанням: чи можна автоматично знаходити певні правила, щоб прискорити деякі запити до крупних баз даних. Тоді ж було запропоновано два терміни — Data Mining (який слід переводити як «розкопка даних») і Knowledge Discovery In Data (який слід переводити як «відкриття знань в базах даних»).

У 1993 році вийшла перша розсилка «Knowledge Discovery Nuggets», а в 1994 році був створений один з перших сайтів по Data Mining.

## 3.3 Постановка задачі

Спочатку, завдання ставиться наступному образом:

- є достатньо крупна база даних;
- передбачається, що в базі даних знаходяться якісь «приховані знання».

Необхідно розробити методи виявлення знань, прихованих у великих об'ємах початкових «сирих» даних.

Що означає «приховані знання»? Це повинні бути обов'язково знання:

- раніше не відомі — тобто, такі знання, які повинні бути новими (а не підтверджуючими якісь раніше отримані відомості);
- нетривіальні — тобто, такі, які не можна просто так побачити (при безпосередньому візуальному аналізі даних або при обчисленні простих статистичних характеристик);

- практично корисні — тобто, такі знання, які представляють цінність для дослідника або споживача;
- доступні для інтерпретації — тобто, такі знання, які легко представити в наочній для користувача формі і легко пояснити в термінах наочної області.

Цими вимоги, багато в чому, визначають суть методів Data mining і те, в якому вигляді і в якому співвідношенні в технології Data mining використовуються системи управління базами даних, статистичні методи аналізу і методи штучного інтелекту.

### **3.4 Data mining і бази даних**

Методи Data mining має сенс застосовувати тільки для достатньо великих баз даних. У кожній конкретній області досліджень існує свій критерій «великості» бази даних.

Розвиток технологій баз даних спочатку привів до створення спеціалізованої мови — мови запитів до баз даних. Для реляційних баз даних — це мова SQL, яка надала широкі можливості для створення, зміни і витягання даних, що зберігаються. Потім виникла необхідність в отриманні аналітичної інформації (наприклад, інформації про діяльність підприємства за певний період), і тут виявилось, що традиційні реляційні бази даних, добре пристосовані, наприклад, для ведення оперативного обліку (на підприємстві), погано пристосовані для проведення аналізу. Це привело, у свою чергу, до створення т.з. «сховищ даних», сама структура яких якнайкращим способом відповідає проведенню всебічного математичного аналізу.

### **3.5 Data mining і статистика**

У основі методів Data mining лежать математичні методи обробки даних, включаючи і статистичні методи. У промислових рішеннях, нерідко, такі методи безпосередньо включаються в пакети Data mining. Проте, слід враховувати, що статистичні методи, по-перше, ґрунтуються на статистичній природі аналізованих явищ (наприклад, зазвичай постулювали форму розподілу випадкової величини), а, по-друге, результати статистичних методів, як правило, є тривіальними (легко розраховуються), практично даремними (наприклад, всілякі середні) і такими, що важко інтерпретуються (ті ж середні), що повністю розходиться з цілями і завданнями Data mining. Проте, статистичні методи використовуються, але їх застосування обмежується виконанням тільки певних етапів дослідження.

### 3.6 Data mining і штучний інтелект

Знання, що здобуваються методами Data mining прийнято представляти у вигляді **моделей**. Як такі моделі виступають:

- асоціативні правила;
- дерева рішень;
- кластери;
- математичні функції.

Методи побудови таких моделей прийнято відносити до області т.з. «штучного інтелекту».

#### **Контрольні питання:**

1. Що таке Data Mining ?
2. Вимоги до переробки інформації
3. Що лежить в основі технології Data Mining ?
4. Опишіть рівні знань витягваних з даних
5. Які завдання вирішує Data Mining (перерахувати)?
6. Розкрийте поняття Information retrieval
7. Що має на увазі text data mining?
8. Навіщо використовують web mining ?
9. Походження Data Mining
10. Які правила постановки завдання Data Mining?
11. Взаємозв'язок Data Mining і баз даних

## 4. DATA MINING (ПРОДОВЖЕННЯ)

### 4.1 Класи систем Data Mining

Data Mining є мультидисциплінарною областю, виниклої прикладної статистики, розпізнавання образів, методів штучного інтелекту, теорії баз даних і ін., що розвивається на базі досягнень Звідси велика кількість методів і алгоритмів, реалізованих в різних системах Data Mining, що діють. Багато хто з таких систем інтегрує в собі відразу декілька підходів. Проте, як правило, в кожній системі є якась ключова компоненту, на яку робиться головна ставка.



Рисунок 4.1 – Data Mining — мультидисциплінарна область

#### 4.1.1 Предметно-орієнтовані аналітичні системи

Предметно-орієнтовані аналітичні системи дуже різноманітні. Найбільш широкий підклас таких систем, що набув поширення в області дослідження фінансових ринків, носить назву "Технічний аналіз". Він є сукупністю декількох десятків методів прогнозу динаміки цін і вибору оптимальної структури інвестиційного портфеля, заснованих на різних емпіричних моделях динаміки ринку. Ці методи часто використовують нескладний статистичний апарат, але максимально враховують ту, що склалася своїй області специфіку

(професійна мова, системи різних індексів і ін.). На ринку є безліч програм цього класу. Як правило, вони досить дешеві (зазвичай \$300–1000).

#### 4.1.2 Статистичні пакети

Останні версії майже всіх відомих статистичних пакетів включають разом з традиційними статистичними методами також елементи Data Mining. Але основна увага в них приділяється все ж таки класичним методикам — кореляційному, регресійному, факторному аналізу і іншим.

Недоліком систем цього класу вважають вимогу до спеціальної підготовки користувача. Також відзначають, що могутні сучасні статистичні пакети є дуже "ваговитими" для масового застосування у фінансах і бізнесі. До того ж часто ці системи вельми дорогі — від \$1000 до \$15000.

Є ще серйозніший принциповий недолік статистичних пакетів, що обмежує їх застосування в Data Mining. Більшість методів, що входять до складу пакетів спираються на статистичну парадигму, в якій головними фігурантами служать усереднені характеристики вибірки.

Як приклади найбільш могутніх і поширених статистичних пакетів можна назвати SAS (компанія SAS Institute), SPSS (SPSS), STATGRAPHICS (Manugistics), STATISTICA, STADIA та інші.

#### 4.1.3 Нейронні мережі

Це великий клас систем, архітектура яких має аналогію (як тепер відомо, досить слабку) з побудовою нервової тканини з нейронів. У одній з найбільш поширеної архітектури, багат шаровому перцептроні із зворотним розповсюдженням помилки, імітується робота нейронів у складі ієрархічної мережі, де кожен нейрон більш високого рівня сполучений своїми входами з виходами нейронів шару, що пролягає нижче. На нейрони самого нижнього шару подаються значення вхідних параметрів, на основі яких потрібно ухвалювати якісь рішення, прогнозувати розвиток ситуації і так далі. Ці значення розглядаються як сигнали, що передаються в наступний шар, ослаблюючись або посилюючись залежно від числових значень (вагів), що приписуються міжнейронним зв'язкам. В результаті на виході нейрона самого верхнього шару виробляється деяке значення, яке розглядається як відповідь — реакція всієї мережі на введені значення вхідних параметрів. Для того, щоб мережу можна було застосовувати надалі, її раніше треба "натренувати" на отриманих раніше даних, для яких відомі і значення вхідних параметрів, і правильні відповіді на них. Тренування полягає в підборі вагів міжнейронних

зв'язків, що забезпечують найбільшу близькість відповідей мережі до відомих правильних відповідей.

Основним недоліком нейромережевої парадигми є необхідність мати дуже великий об'єм повчальної вибірки. Інший істотний недолік полягає в тому, що навіть натренована нейронна мережа є чорним ящиком. Знання, зафіксовані як ваги декількох сотень міжнейронних зв'язків, абсолютно не піддаються аналізу і інтерпретації людиною (відомі спроби дати інтерпретацію структурі настроєної нейромережі виглядають непереконливими – система “KINOsuite-PR”).

Приклади нейромережевих систем — BrainMaker (CSS), NeuroShell (Ward Systems Group), OWL (HyperLogic). Вартість їх досить значна: \$1500–8000.

#### 4.1.4 Системи міркувань на основі аналогічних випадків

Ідея систем case based reasoning — CBR — на перший погляд у край проста. Для того, щоб зробити прогноз майбутнє або вибрати правильне рішення, ці системи знаходять у минулому близькі аналоги наявної ситуації і вибирають ту ж відповідь, яка була для них правильним. Тому цей метод ще називають методом "найближчого сусіда" (nearest neighbour). Останнім часом поширення набув також термін memory based reasoning, який акцентує увагу, що рішення ухвалюється на підставі всієї інформації, накопиченої в пам'яті.

Системи CBR показують непогані результати в найрізноманітніших завданнях. Головним їх мінусом вважають те, що вони взагалі не створюють яких-небудь моделей або правил, узагальнюючих попередній досвід, — у виборі рішення вони ґрунтуються на всьому масиві доступних історичних даних, тому неможливо сказати, на основі яких конкретно чинників CBR системи будують свої відповіді.

Іншою мінусом полягає в свавіллі, яке допускають системи CBR при виборі міри "близькості". Від цього заходу найрішучішим чином залежить об'єм безлічі прецедентів, які потрібно зберігати в пам'яті для досягнення задовільної класифікації або прогнозу.

Приклади систем, що використовують CBR, — KATE tools (Acknosoft, Франція), Pattern Recognition Workbench (Unica, США).

#### 4.1.5 Дерева рішень (decision trees)

Дерева рішення є одним з найбільш популярних підходів до вирішення завдань Data Mining. Вони створюють ієрархічну структуру класифікуючих правил типу "ЯКЩО... ТО..." (if-then), що має вид дерева. Для ухвалення

рішення, до якого класу віднести деякий об'єкт або ситуацію, потрібно відповісти на питання, що стоять у вузлах цього дерева, починаючи з його кореня. Питання мають вигляд "значення параметра  $A$  більше  $x$ ". Якщо відповідь позитивна, здійснюється перехід до правого вузла наступного рівня, якщо негативний — те до лівого вузла; потім знову слідує питання, пов'язане з відповідним вузлом.

Популярність підходу пов'язана як би з наочністю і зрозумілістю. Але дерева рішень принципово не здатні знаходити "кращі" (якнайповніші і точніші) правила даних. Вони реалізують наївний принцип послідовного перегляду ознак і "чіпляють" фактично осколки справжніх закономірностей, створюючи лише ілюзію логічного виводу.

Разом з тим, більшість систем використовують саме цей метод. Найвідомішими є See5/C5.0 (RuleQuest, Австралія), Clementine (Integral Solutions, Великобританія), SIPINA (University of Lyon, Франція), IDIS (Information Discovery, США), KnowledgeSeeker (ANGOSS, Канада). Вартість цих систем варіюється від 1 до 10 тис. дол.

#### 4.1.6 Еволюційне програмування

Проілюструємо сучасне перебування даного підходу на прикладі системи PolyAnalyst — що отримала сьогодні загальне визнання на ринку Data Mining. У даній системі гіпотези про вид залежності цільової змінної від інших змінних формуються у вигляді програм на деякій внутрішній мові програмування. Процес побудови програм будується як еволюція в світі програм (цим підхід трохи схожий на генетичні алгоритми). Коли система знаходить програму, більш менш задовільно відповідаючу шуканій залежності, вона починає вносити до неї невеликі модифікації і відбирає серед побудованих дочірніх програм ті, які підвищують точність. Таким чином система "вирощує" декілька генетичних ліній програм, які конкурують між собою в точності виразу шуканій залежності. Спеціальний модуль системи PolyAnalyst перекладає знайдені залежності з внутрішньої мови системи на зрозумілій користувачеві мові (математичні формули, таблиці і ін.).

Інший напрям еволюційного програмування пов'язаний з пошуком залежності цільових змінних від останніх у формі функцій якогось певного вигляду. Наприклад, в одному з найбільш вдалих алгоритмів цього типу — методі групового обліку аргументів (МГУА) залежність шукають у формі поліномів.



#### 4.1.7 Генетичні алгоритми

Data Mining не основна область застосування генетичних алгоритмів. Їх потрібно розглядати швидше як могутній засіб вирішення різноманітних комбінаторних завдань і завдань оптимізації. Проте генетичні алгоритми увійшли зараз до стандартного інструментарію методів Data Mining, тому вони і включені в даний огляд.

Перший крок при побудові генетичних алгоритмів — це кодування початкових логічних закономірностей в базі даних, які іменують хромосомами, а весь набір таких закономірностей називають популяцією хромосом. Далі для реалізації концепції відбору вводиться спосіб зіставлення різних хромосом. Популяція обробляється за допомогою процедур репродукції, мінливості (мутацій), генетичної композиції. Ці процедури імітують біологічні процеси. Найбільш важливі серед них: випадкові мутації даних в індивідуальних хромосомах, переходи (кросинговер) і рекомбінація генетичного матеріалу, що міститься в індивідуальних батьківських хромосомах (аналогічно гетеросексуальній репродукції), і міграції генів. В ході роботи процедур на кожній стадії еволюції виходять популяції зі все більш досконалішими індивідуумами.

Генетичні алгоритми зручні тим, що їх легко розпаралелювати. Наприклад, можна розбити покоління на декілька груп і працювати з кожною з них незалежно, обмінюючись час від часу декількома хромосомами.

Генетичні алгоритми мають ряд недоліків. Критерій відбору хромосом і використовувані процедури є евристичними і далеко не гарантують знаходження “кращого” рішення. Як і в реальному житті, еволюцію може “заклинити” на якій-небудь непродуктивній гілці. І, навпаки, можна привести приклади, як два неперспективний батько, які будуть виключені з еволюції генетичним алгоритмом, виявляються здатними провести високоефективного нащадка. Це особливо стає помітно при вирішенні високорозмірних завдань з складними внутрішніми зв'язками.

Прикладом може служити система GeneHunter фірми Ward Systems Group. Її вартість — близько \$1000.

##### 4.1.1. Алгоритми обмеженого перебору

Алгоритми обмеженого перебору були запропоновані в середині 60-х років М.М. Бонгардом для пошуку логічних закономірностей в даних. З тих пір вони продемонстрували свою ефективність при вирішенні безлічі завдань з самих різних областей.

Ці алгоритми обчислюють частоти комбінацій простих логічних подій в підгрупах даних. Приклади простих логічних подій:  $X = a$ ;  $X < a$ ;  $X > a$ ;  $a < X < b$  і ін., де  $X$  — який або параметр, “ $a$ ” і “ $b$ ” — константи. Обмеженням служить довжина комбінації простих логічних подій (у М. Бонгарда вона була рівна 3). На підставі аналізу обчислених частот робиться висновок про корисність тієї або іншої комбінації для встановлення асоціації в даних, для класифікації, прогнозування і ін.

Найбільш яскравим сучасним представником цього підходу є система WizWhy підприємства WizSoft. Хоча автор системи Абрам Мейдан не розкриває специфіку алгоритму, покладеного в основу роботи WizWhy, за наслідками ретельного тестування системи були зроблені висновки про наявність тут обмеженого перебору (вивчалися результати, залежності часу їх отримання від числа аналізованих параметрів і ін.).

Автор WizWhy стверджує, що його система виявляє всі логічні if-then правила в даних. Насправді це, звичайно, не так. По-перше, максимальна довжина комбінації в if-then правилі в системі WizWhy рівна 6, і, по-друге, з самого початку роботи алгоритму проводиться евристичний пошук простих логічних подій, на яких потім будується весь подальший аналіз. Зрозумівши ці особливості WizWhy, неважко було запропонувати просте тестове завдання, яке система не змогла взагалі вирішити. Інший момент — система видає рішення за прийнятний час тільки для порівняно невеликої розмірності даних.

Проте, система WizWhy є на сьогоднішній день одним з лідерів на ринку продуктів Data Mining. Це не позбавлено підстав. Система постійно демонструє вищі показники при вирішенні практичних завдань, чим решта всіх алгоритмів. Вартість системи біля \$ 4000, кількість продажів — 30000.

#### 4.1.2. Системи для візуалізації багатовимірних даних

В тій чи іншій мірі засоби для графічного відображення даних підтримуються всіма системами Data Mining. Разом з тим, вельми значну частку ринку займають системи, що спеціалізуються виключно на цій функції. Прикладом тут може служити програма DataMiner 3D словацької фірми Dimension5 (5-е вимірювання).

У подібних системах основна увага сконцентрована на доброзичливості призначеного для користувача інтерфейсу, що дозволяє асоціювати з аналізованими показниками різні параметри діаграми розсіювання об'єктів (записів) бази даних. До таких параметрів відносяться колір, форма, орієнтація щодо власної осі, розміри і інші властивості графічних елементів зображення.

Крім того, системи візуалізації даних забезпечені зручними засобами для масштабування і обертання зображень. Вартість систем візуалізації може досягати декількох сотень доларів.

## 4.2 Висновок по лекції

Для операції необхідно визначити, що є система, визначити її елементи, основні властивості системи. Основною властивістю системи є ті, що вона володіє характеристиками, принципово відмінними від характеристик складових її елементів.

Опис системи визначаємо як:

- функціональний опис;
- морфологічний опис;
- інформаційний опис.

Сукупність функціонального, морфологічного і інформаційного описів дозволяє відобразити головні властивості системи.

Система – це цілісна сукупність елементів, що означає, з одного боку, що це цілісне утворення, а з іншого боку, що в її складі можуть бути виділені цілісні об'єкти – елементи.

Властивості системи залежать від властивостей елементів, але не визначаються ними повністю, тобто: \_

- система не зводиться до простій сукупності елементів;
- розподіливши систему на окремі частини, вивчаючи кожен з них окремо, не можна зрозуміти всі властивості системи в цілому.

Системний підхід – це конкретно-науковий метод діалектичної методології, що має загальнонаукове значення.

Сукупність прийомів і методів для вивчення складних систем є системним аналізом. Системний аналіз – це засіб і технологія системного підходу.

Основні етапи системного аналізу.

- постановка завдання;
- структуризація і контур між;
- розбиття об'єктів і процесів;
- складання моделі системи, що вивчається;
- дослідження отриманої (побудованою) системи
- Інструмент системного аналізу – моделювання.

У економічних процесах інформація є визначальний. Виділяють наступні рівні інформації:

- початкові дані – необроблені масиви даних, отримувані в результаті спостереження за якоюсь динамічною системою або об'єкту і що відображають його стан в конкретні моменти години;

- інформація – оброблені дані, які несуть в собі якусь інформаційну цінність для користувача; сирі дані, представлені в компактнішому вигляді;

- знання — несуть в собі якість ноу-хау, відображають приховані взаємозв'язки между об'єктами, які не є загальнодоступними.

Data Mining – інтелектуальний аналіз даних.

Завдання, що вирішуються методами Data Mining, прийнято розділяти на:

- описові (англ. descriptive);
- що передбачають (англ. predictive).

У описових завданнях найголовніше — це дати наочний опис наявних прихованих закономірностей, тоді як в завданнях, що передбачають, на першому плані коштує питання про прогноз для тих випадків, для яких даних ще немає.

До описових завдань відносяться:

- Пошук асоціативних правил або патернів (зразків).
- Угрупування об'єктів або кластеризація.
- Побудова регресійної моделі.
- До завдань, що передбачають, відносяться:
- Класифікація об'єктів (для заздалегідь заданих класів).
- Побудова регресійної моделі.

Виділяється типовий ряд етапів вирішення завдань методами Data Mining:

- Формування гіпотези;
- Збір даних;
- Підготовка даних (фільтрація);
- Вибір моделі;
- Підбір параметрів моделі і алгоритму навчання;
- Навчання моделі (автоматичний пошук решти параметрів моделі);
- Аналіз якості навчання, якщо незадовільний перехід на п. 5 або п. 4;
- Аналіз виявлених закономірностей, якщо незадовільний перехід на п. 1, 4 або 5.

Вирішення завдань методами Data Mining проводяться спеціальними математичними програмними продуктами.

## **Контрольні питання:**

1. Опишіть класи систем Data Mining\_
2. Що собою представляють – наочно-орієнтовані системи?
3. Приведіть приклади статистичних пакетів для обробки даних
4. Нейронні мережі. Опишіть суть методу, в чому особливість нейромережевої парадигми
5. Система CBR (case based reasoning). Особливості і недоліки.
6. У чому полягає суть методу дерева рішень (decision trees)?
7. У чому суть підходу «еволюційного програмування»?
8. Розкрийте принцип методу і область застосування «Генетичних алгоритмів»
9. У чому полягають алгоритми обмеженого перебору?
10. Опишіть область застосування і особливості методу візуалізації багатовимірних даних

## 5. МОДЕЛІ І МОДЕЛЮВАННЯ

### 5.1 Моделювання і поняття моделі

Модель – спрощене уявлення про реальний об'єкт, процес або явище.

Моделювання - побудова\_моделей для дослідження і вивчення об'єктів, процесів, явищ.

Технологія моделювання - сукупність цілеспрямованих дій користувача над комп'ютерною моделлю

Комп'ютерне конструювання - процес створення комп'ютерної моделі з типових елементарних об'єктів.

Процес перевірки правильності моделі – тестування.

Основні поняття моделювання:

**Об'єкт** *-(objectum* – предмет від латинського об'єкіо – кидаю вперед) – предмет обговорення.

**Модель** – *(Modele* – французький від латинського modulus-мера, зразок) – пристрій, що відтворюючий, такий, що імітує дію.

Хоча деякі моделі, використовувані наукою управління, настільки складні, що без комп'ютера обійтися неможливо, концепція моделювання проста. За визначенням Шенона: «МОДЕЛЬ – це представлення об'єкту, системи або ідеї в деякій формі, відмінній від самої цілісності».

Головною характеристикою моделі можна вважати спрощення реальної життєвої ситуації, до якої вона застосовується. Оскільки форма моделі менш складна, а не що відносяться до справи дані, що затуманюють проблему в реальному житті, усуваються, модель часто підвищує здібність керівника до розуміння і дозволу проблем, що встають перед ним.

Цілі моделювання:

- зрозуміти як влаштований конкретний об'єкт, яка його структура, закони розвитку;
- навчитися управляти об'єктом або процесом, визначити якнайкращі способи управління при заданих цілях і критеріях;
- прогнозувати прямі і непрямі наслідки реалізації заданих способів.

### 5.2 Основні властивості будь-якої моделі:

кінцівка — модель відображає оригінал лише в кінцевому числі його відносин і, крім того, ресурси моделювання кінцеві;

спрошеність — модель відображає тільки істотні сторони об'єкту і, крім того, повинна бути проста для дослідження або відтворення;

приблизність — дійсність відображається моделлю грубо, або приблизно;

адекватність модельованій системі — модель повинна успішно описувати модельовану систему;

наочність, осяжність основних властивостей і відносин;

доступність і технологічність для дослідження або відтворення;

інформативність — модель повинна містити достатню інформацію про систему (в рамках гіпотез, прийнятих при побудові моделі) і давати можливість отримати нову інформацію;

збереження інформації, що містилася в оригіналі (з точністю гіпотез, що розглядаються при побудові моделі);

повнота — в моделі повинні бути враховані всі основні зв'язки і відносини, необхідні для забезпечення мети моделювання;

стійкість — модель повинна описувати і забезпечувати стійку поведінку системи, якщо навіть та спочатку є нестійкою;

замкнутість — модель враховує і відображає замкнуту систему необхідних основних гіпотез, зв'язків і відносин.

Проблема моделювання складається з трьох завдань:

- побудови моделі (це завдання менш формалізується і конструктивна, в тому сенсі, що немає алгоритму для побудови моделей);
- дослідження моделі (це завдання більш формалізується, є методи дослідження різних класів моделей);
- використання моделі (конструктивне завдання, що конкретизується).

### **5.3 Необхідність моделювання**

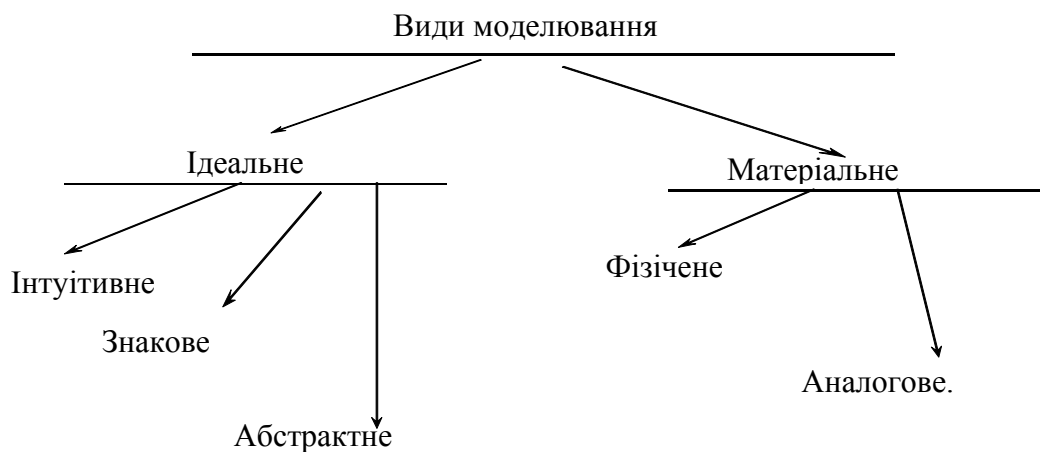
Існує ряд причин, що обумовлюють використання моделі замість спроб прямої взаємодії з реальним світом.

**СКЛАДНІСТЬ.** Прагнення моделювання бути корисним в дозволі організаційних проблем реального миру. Реальний мир організації виключно складний і фактичне число змінних, що відносяться до конкретної проблеми, значно перевершує можливості будь-якої людини і досягнути його можна, спростивши реальний мир за допомогою моделювання.

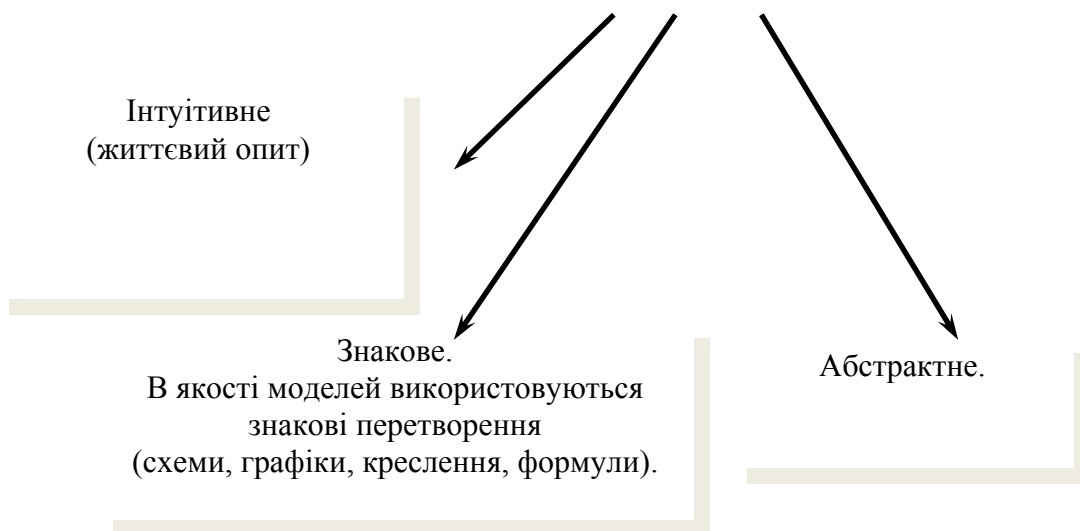
**ЕКСПЕРИМЕНТУВАННЯ.** Зустрічається безліч управлінських ситуацій, в яких бажано випробувати і експериментально перевірити альтернативні

варіанти вирішення проблеми. Певні експерименти в умовах реального світу можуть і повинні бути виконані. Але пряме експериментування коштує дорого і вимагає часу, і тут на допомогу приходять моделі.

## 5.4 Типи моделей

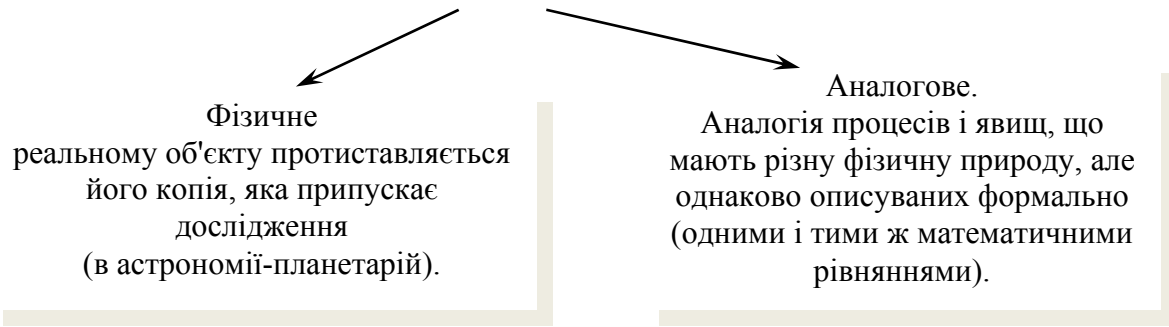


### Ідеальне моделювання





# Матеріальне моделювання



Три базові типи моделей. Мова йде про фізичних, аналогових і математичних моделях.

**ФІЗИЧНА МОДЕЛЬ.** **Фізична модель** представляє те, що досліджується, за допомогою збільшеного або зменшеного опису об'єкту або системи.

Приклади фізичної моделі – синька креслення заводу, його зменшена фактична модель, зменшене в певному масштабі креслення проектувальника. Така фізична модель спрощує візуальне сприйняття і допомагає встановити, чи зможе конкретне устаткування фізично розміститися в межах відведеного для нього місця, а також вирішити зв'язані проблеми, наприклад, розміщення дверей, прискорююче рух людей і матеріалів.

**АНАЛОГОВА МОДЕЛЬ.** **Аналогова модель** представляє досліджуваний об'єкт аналогом, який поводить як реальний об'єкт, але не виглядає як такий. Графік, що ілюструє співвідношення між об'ємом виробництва і витратами (рис. 5.1), є аналоговою моделлю. Графік показує, як впливає рівень виробництва на витрати.

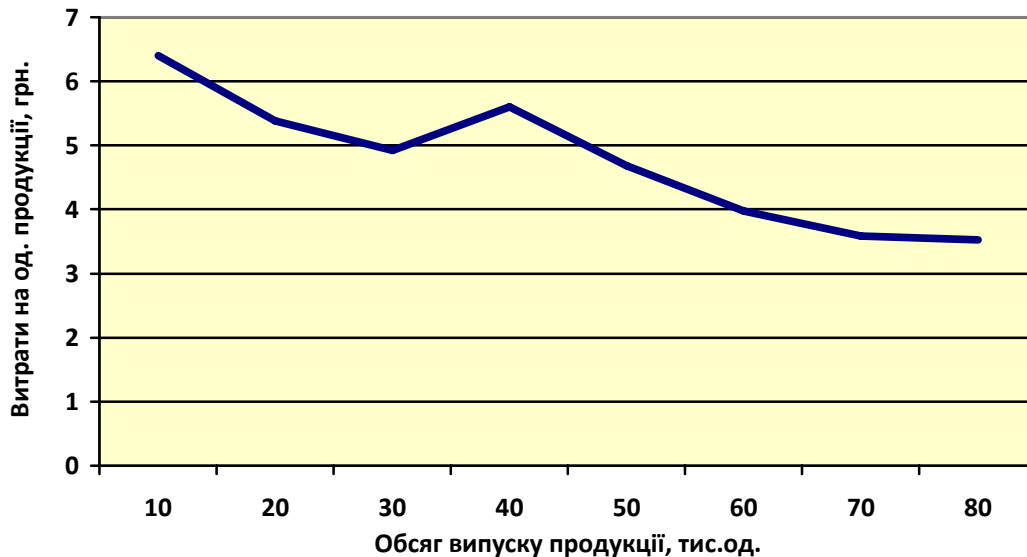
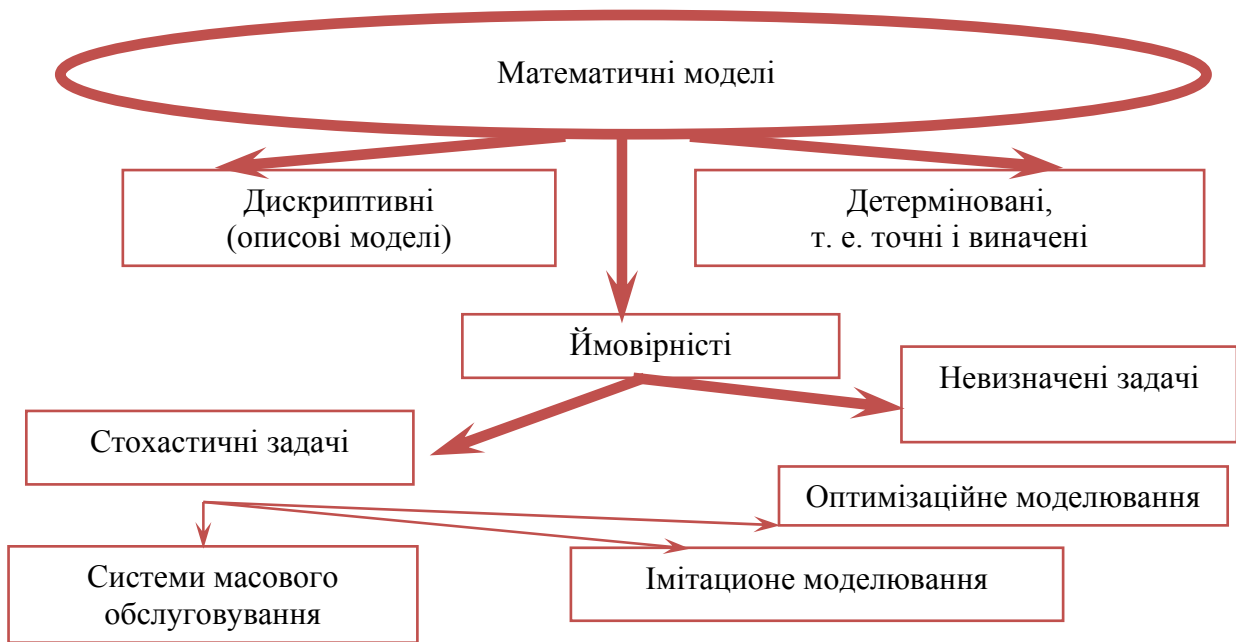


Рисунок 5.1 – Аналогова модель.

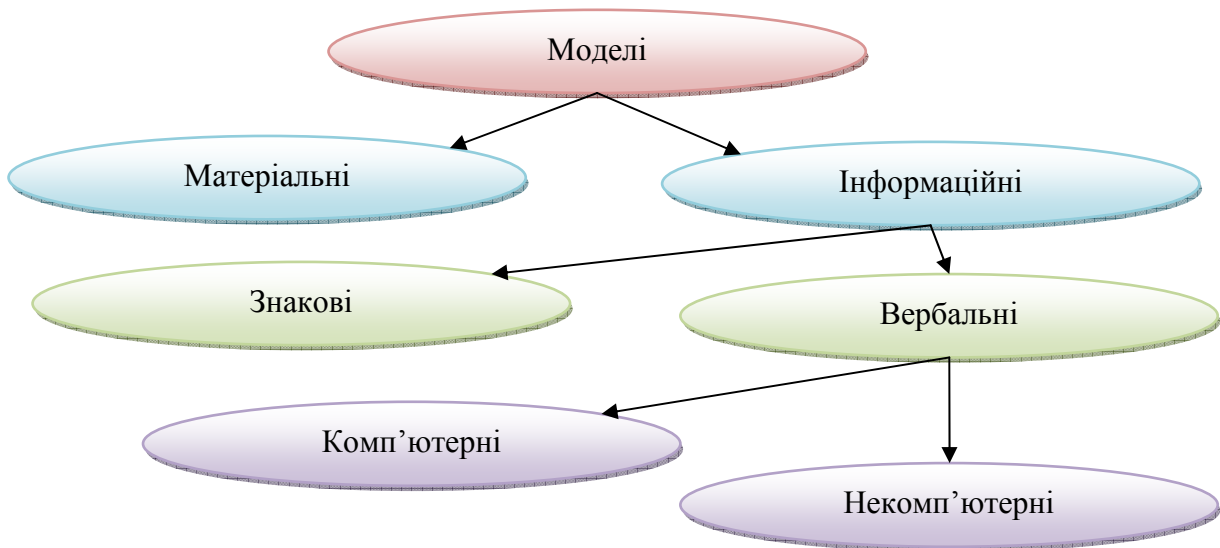
Інший приклад аналогової моделі – організаційна схема. Побудовувавши її, керівництво в стані легкого уявити собі ланцюги проходження команд і формальну залежність між індивідами і діяльністю. Така аналогова модель явно більш простій і ефективний спосіб сприйняття і прояву складних взаємозв'язків структури крупної організації, чим, скажімо, складання переліку взаємозв'язків всіх працівників.

**МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ.** У математичній моделі, званій також символічній, використовуються символи для опису властивостей або характеристик об'єкту або події. Приклад математичної моделі і аналітичної її сили як засобу, що допомагає нам розуміти виключно складні проблеми, – відома формула  $E = mc^2$ .

Ймовірно, математичні моделі відносяться до типу моделей, найчастіше використовуваних при ухваленні організаційних рішень.



Класифікація за способом представлення



### 5.5 Процес побудови моделі

Побудова моделі, як і управління, є процесом. Основні етапи процесу – постановка завдання, побудова, перевірка на достовірність, застосування і оновлення моделі.

Постановка завдання. Перший і найбільш важливий етап побудови моделі, здатний забезпечити **правильне** вирішення управлінської проблеми, полягає в **постановці завдання**. Правильне використання математики або

комп'ютера не принесе ніякої користі, якщо сама проблема не буде точно діагностована. З того що керівник обізнаний про наявність проблеми, зовсім не слідує факт ідентифікації дійсної проблеми.

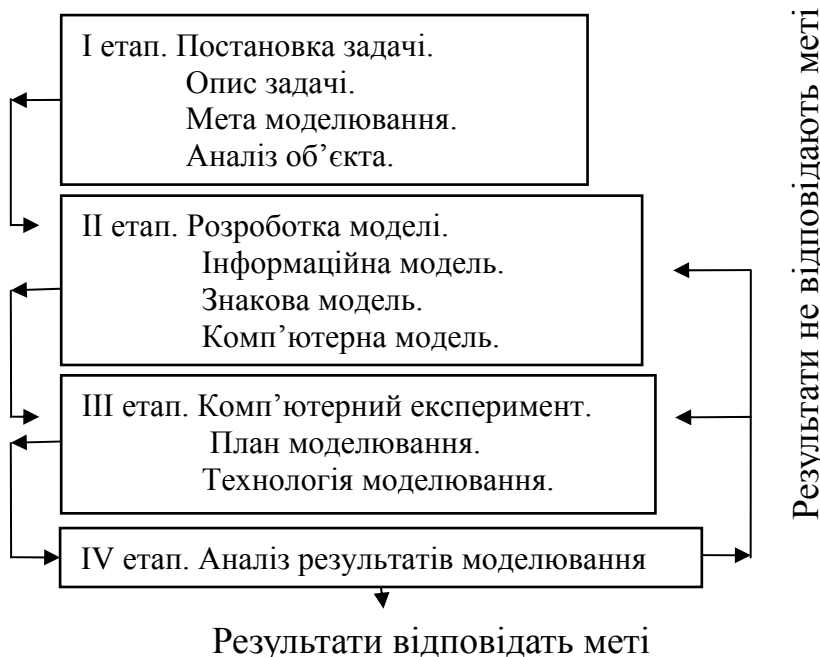
Побудова моделі. Після правильної постановки завдання наступним етапом процесу передбачена побудова моделі. Розробник повинен визначити головну мету моделі, які вихідні нормативи або інформацію передбачається отримати, використовуючи модель, щоб допомогти керівництву вирішити проблему, що стоїть перед ним. Потрібна вихідна інформація повинна представляти точні нормативи часу і кількості що підлягають замовленню початкових матеріалів і запасних частин.

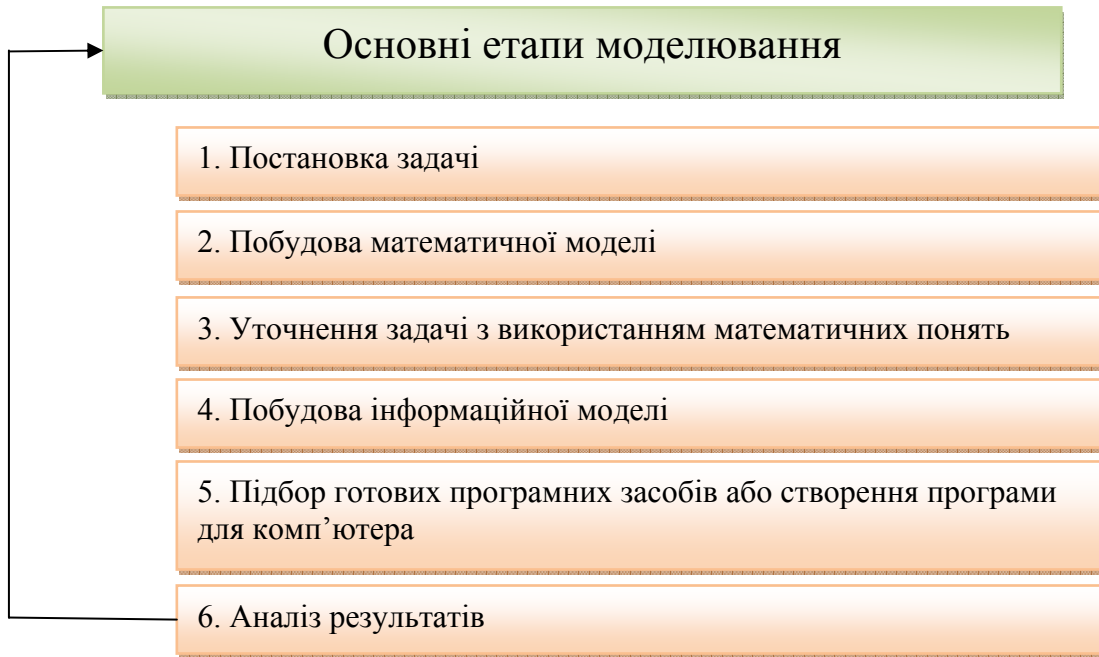
На додаток до встановлення головних цілей, необхідно визначити – яка інформація потрібна для побудови моделі, що задовольняє цим цілям і що видає на виході потрібні відомості.

Часто ця необхідна інформація розкидана по багатьом джерелам.

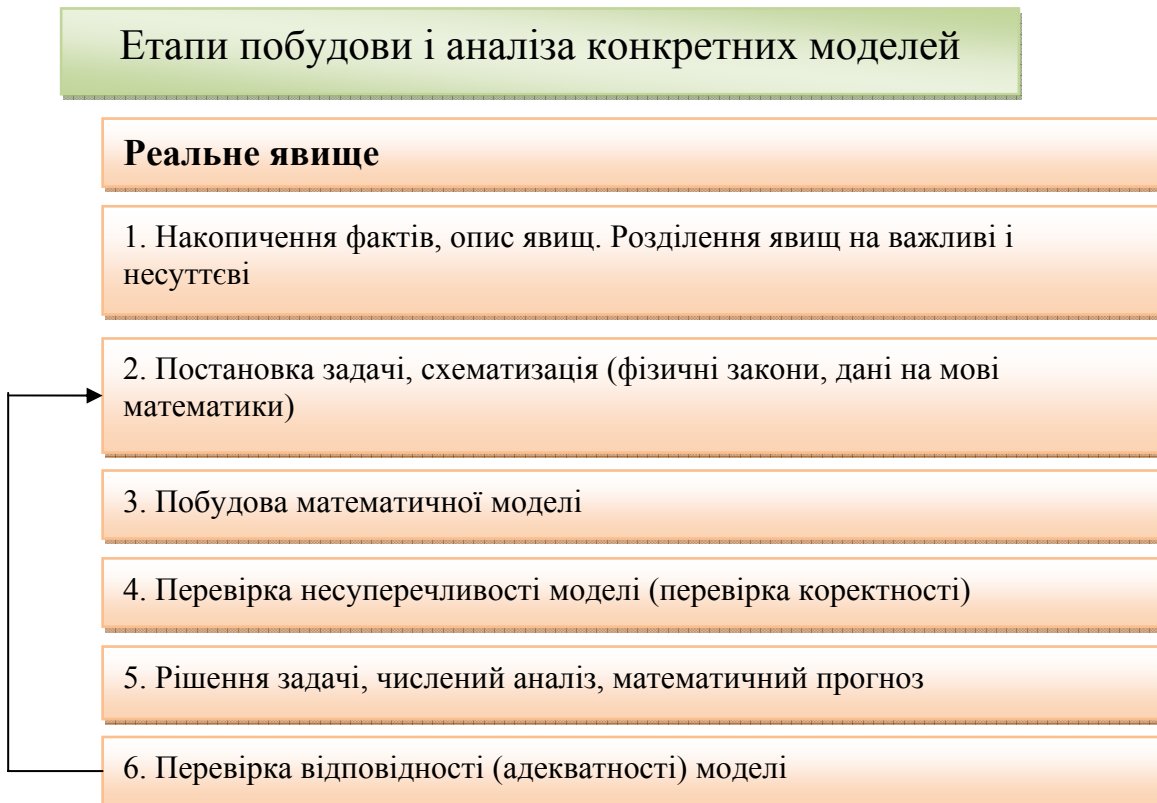
До інших чинників, що вимагають обліку при побудові моделі, слід віднести витрати і реакцію людей. Модель, яка стоїть більше, ніж все завдання, що вимагає рішення за допомогою моделі, звичайно, не внесе ніякого внеску до наближення до цілей організації. Так само, надмірно складна модель може бути сприйнята кінцевими користувачами як загроза і знехтувана ними. Таким чином, для побудови ефективної моделі керівникам і фахівцям з науки управління слід працювати разом, взаємно пов'язуючи потреби кожної сторони.

### Основні етапи моделювання.

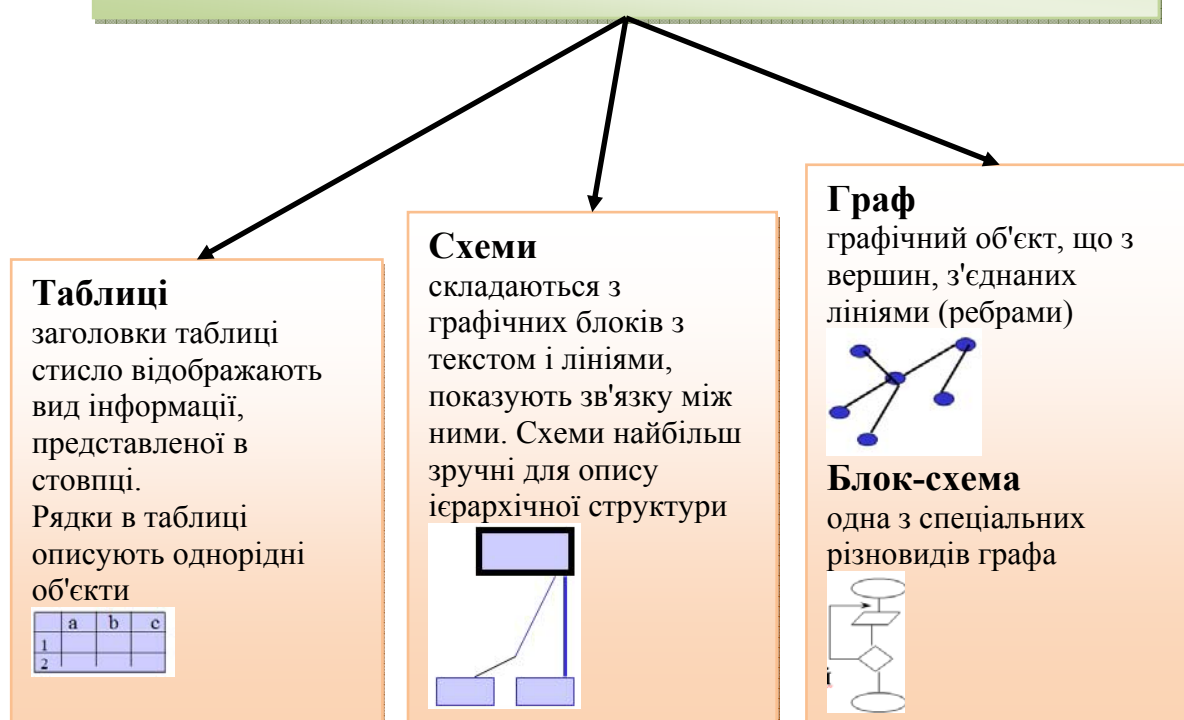




я



## Способи опису інформаційних моделей (інформаційних структур)



### 5.6 Загальні проблеми моделювання

Як всі засоби і методи, моделі науки управління можуть привести до помилок. Ефективність моделі може бути знижена дією ряду потенційних погрешностей. Найбільш початкові допущення, що часто зустрічаються – недостовірні, обмежені можливості отримання потрібної інформації, страхи користувача, слабе використання на практиці, надмірно висока вартість.

Недостовірні початкові допущення. Будь-яка модель спирається на деякі початкові допущення або передумови. Це можуть бути що піддаються оцінці передумови. Такі припущення можна об'єктивно перевірити і прорахувати. Вірогідність того, що сморід точні, буде висока. Деякі передумови не піддаються оцінці і не можуть бути об'єктивно перевірені. Припущення про зростання збуту наступного долі на 10% – приклад допущення, непіддатливого перевірці. Ніхто не знає співучо, чи відбудеться це дійсно. Оскільки такі передумови є основою моделі, точність останньою залежить від точності передумов. Модель не можна використовувати для прогнозування, наприклад, споживи в запасах, якщо неточні прогнози збуту на майбутній період.

На додаток до допущень з приводу компонентів моделі, керівник формулює передумови щодо взаємозв'язків усередині неї.

Інформаційні обмеження. Основна причина невірогідності передумов і інших утруднень – це обмежені можливості в отриманні потрібної інформації, які впливають і на побудову і на використання моделей. Точність моделі визначається точністю інформації з проблеми. Якщо ситуація виключно доладна, фахівець з науки управління може бути не в змозі отримати інформацію по всіх релевантних чинниках або вбудувати її у модель. Якщо зовнішнє середовище рухоме інформацію про неї слід оновлювати швидко, але це може бути таким, що не реалізовується або непрактичним.

Іноді при побудові моделі можуть бути проігноровані істотні аспекти, оскільки сморід не піддаються вимірюванню.

Загалом, побудова моделі найскрутніше в умовах невизначеності. Коли необхідна інформація настільки невизначена, що її важко отримати, виходячи з критерію об'єктивності, керівникові, можливо, доцільніше покластися на свій досвід, здібність до думання інтуїцію і допомогу консультантів.

Страх користувачів. Модель не можна вважати ефективною, якщо нею не користуються. Основна причина невикористання моделі полягає в тому, що керівники, яким вона призначена, можуть не цілком розуміти отримувані за допомогою моделі результати і тому боятися її застосовувати.

Керівники повинні бути підготовлені до застосування моделей, а вищому керівництву слід підкреслювати, наскільки значно успіх організації залежить від моделей і як смороду підвищують здатність керівників ефективно планувати і контролювати роботові організації.

Слабке використання на практиці. Згідно ряду досліджень рівень методів моделювання в рамках науки управління перевершує рівень використання моделей. Як указувалося вище, одна з причин такого положення справ – страх. Інші заподій – це недолік знань і опір змінам. Дана проблема підкріплює бажаність того, щоб на стадії побудови моделі штабні фахівці привертали до цієї справи користувачів. Коли люди мають можливість обговорити і краще зрозуміти питання, метод або передбачувану зміну їх опір зазвичай знижується.

Надмірна вартість. Сенсу від використання моделі, як і інших методів управління, повинні з лишком виправдовувати її вартість. При встановленні витрат на моделювання керівництву слід враховувати витрати годині керівників вищого і нижчого рівнів на побудову моделі і збір інформації, витрати і година на навчання, вартість обробки і зберігання інформації.

## **Контрольні питання:**

1. Дайте визначення моделі
2. У чому полягають цілі моделювання?
3. Перерахуйте загальні властивості будь-якої моделі
4. У чому полягає проблема моделювання?
5. Приведіть ряд типів моделей
6. Які моделі зараховують до фізичних моделей, які моделі відносять до аналогових моделей?
7. Які моделі можна відносити до математичних?
8. Перерахуйте основні етапи моделювання
9. Які етапи виділяють при побудові і аналізі конкретних моделей?
10. Сформулюйте загальні проблеми моделювання



## 6. ВИПАДКОВІ ПОДІЇ, ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ. ЇХ ЗАКОНИ РОЗПОДІЛУ І ЧИСЛОВІ ХАРАКТЕРИСТИКИ

### 6.1 Поняття випадкової величини, визначення

Деякі величини можуть прийняти в результаті досвіду будь-яке з можливих значень, випадкове значення.

Випадковою називають величину, яка в результаті випробування прийме одне і лише одне можливе значення, наперед невідоме і залежне від випадкових причин, які заздалегідь не можуть бути враховані.

Позначимо:  $X, Y, Z$  – випадкові величини

$x_i, y_i, z_i$  – можливі значення випадкових величин.

Дискретною (переривчастою) називають випадкову величину, яка приймає окремі можливі значення  $x_i, i = \overline{1, n}$  або  $i = \overline{1, \infty}$  з певною вірогідністю.

Безперервною називають випадкову величину, яка може приймати всі значення з деякого кінцевого або нескінченного проміжку. Число можливих значень безперервної випадкової величини, незалежно від величини проміжку, нескінченно

$$x, i = \overline{1, \infty}$$

### 6.2 Завдання дискретної випадкової величини

Для завдання дискретної випадкової величини недостатньо перерахувати всі її можливі значення, потрібно вказати ще і їх вірогідність.

Законом розподілу дискретної випадкової величини називають відповідність між її можливими значеннями і вірогідністю їх появи. Закон розподілу можна задати табличний, аналітично (у вигляді формули) і графічно (у вигляді багатокутника розподілу).

Табличне завдання закону розподілу:

$Xx_1x_2 \dots x_n \rightarrow$  можливі значення випадкової величини;

$Pp_1p_2 \dots p_n \rightarrow$  вірогідність появи випадкової величини.

Аналітичне завдання закону розподілу:

Біноміальний розподіл, визначуваний розподілом Бернуллі

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$$

$do = 0, 1, 2 \dots, n$  – кількість можливих появ подій

$q = 1-p$  – вірогідність не появи подій.

Розподіл Пуассона, визначуваний асимптотичною формулою Пуассона:

$$P_n(k) = \frac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!}$$

де:

$\lambda$  – інтенсивність потоку подій.

Графічне завдання закону розподілу представлено на рисунку 6.1.

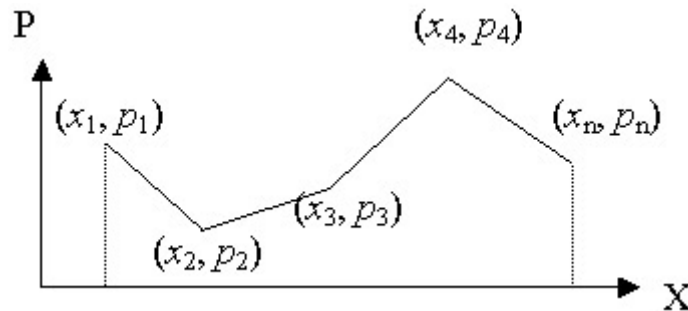


Рисунок 6.1 – Графічне завдання закону розподілу

Спосіб опису розподілу випадкової величини у вигляді таблиці, у вигляді формули або графічно застосовний тільки для дискретних випадкових величин.

### 6.3 Інтегральна функція розподілу випадкової величини

Інтегральна функція розподілу (ІФР) – це функція  $F(x)$ , що визначає для кожного можливого значення  $x$  вірогідність того, що випадкова величина  $X$  прийме значення менше  $x$ , тобто

$$F(x) = P(X < x)$$

Геометричний сенс інтегральної функції розподілу – це вірогідність того, що випадкова величина  $X$  прийме значення, яке на числовій осі лежить лівіше за точку  $x$ .

Властивості інтегральної функції розподілу:

Значення інтегральної функції розподілу належать відрізку  $[0;1]$ :  
 $0 \leq F(x) \leq 1$ .

Вірогідність того, що випадкова величина  $X$  прийме значення, пов'язане в інтервалі  $(a,b)$ , рівна приросту інтегральної функції розподілу на цьому інтервалі

$$P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a)$$

Якщо всі можливі значення  $x$  випадкової величини належать інтервалу  $(a, b)$ , то

$$F(x) = 0 \text{ якщо } x \leq a$$

$$F(x) = 1 \text{ якщо } x \geq b$$

Графік ІФР безперервної випадкової величини представлений на рисунку 6.2.

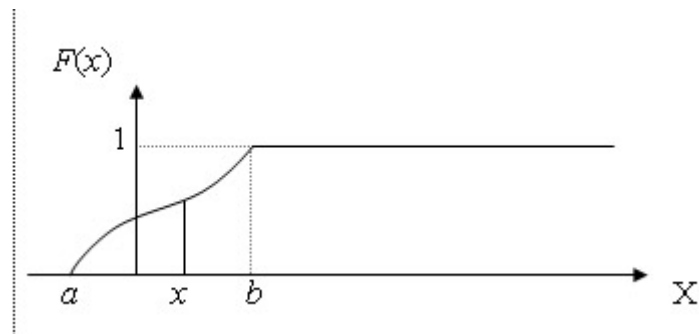


Рисунок 6.2 – Графік ІФР безперервної випадкової величини

Графік ІФР дискретної випадкової величини представлений рисунку 6.3.

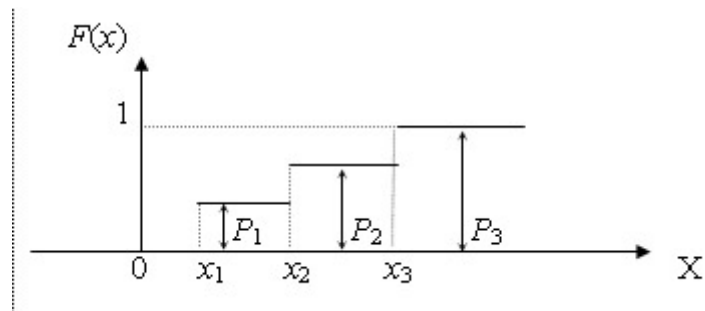


Рисунок 6.3 – Графік ІФР дискретної випадкової величини

## 6.4 Диференціальна функція розподілу випадкової величини

Диференціальна функція розподілу (ДФР) (або щільність вірогідності) – це перша похідна від інтегральної функції.

$$f(x) = F'(x)$$

Інтегральна функція розподілу є первісною для диференціальної функції розподілу. Тоді

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx = P(-\infty < X < x)$$

Вірогідність того, що безперервна випадкова величина  $X$  прийме значення, що належить інтервалу  $(a, b)$ , рівна певному інтегралу від диференціальної функції, узятому в межах від  $a$  до  $b$ :

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) dx$$

Геометричний сенс ДФР полягає в наступному: вірогідність того, що безперервна випадкова величина  $X$  прийме значення, що належить інтервалу  $(a, b)$ , рівна площі криволінійної трапеції, обмеженою віссю  $x$ , кривою розподілу  $f(x)$  і прямими  $x = a$  і  $x = b$  (рис. 6.4).

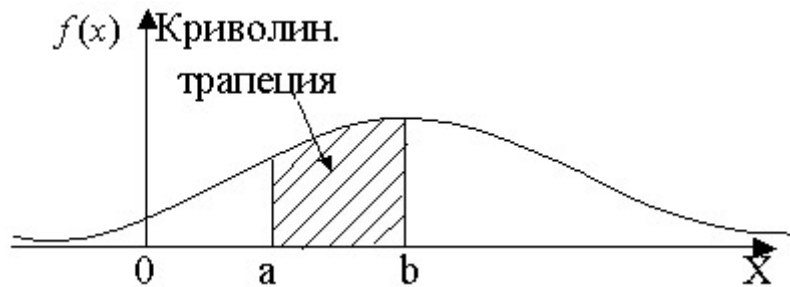


Рисунок 6.4. – Геометричний сенс диференціальної функції розподілу випадкової величини

Графік диференціальної функції розподілу прийнято називати кривий розподілу.

Властивості диференціальної функції розподілу:

- Диференціальна функція розподілу ненегативна, тобто  $f(x) \geq 0$
- Якщо всі можливі значення випадкової величини належать інтервалу  $(a, b)$ , то

$$\int_a^b f(x) dx = 1$$

Оскільки диференціальна функція розподілу рівна  $f(x) = F'(x)$ , то можна записати

$$f(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x}, \quad (6.1)$$

тобто межа відношення вірогідності того, що безперервна випадкова величина прийме значення, що належить інтервалу  $(x, x + \Delta x)$  до довжини цього інтервалу  $\Delta x$  (при  $\Delta x \rightarrow 0$ ), рівний значенню диференціальної функції розподілу в точці  $x$ .

На підставі (6.1) запишемо:

$$F(x + \Delta x) - F(x) \cong f(x) \cdot \Delta x \quad (6.2)$$

Імовірнісний сенс диференціальної функції розподілу на підставі (6.2) такий: вірогідність того, що випадкова величина прийме значення що належить інтервалу  $(x, x + \Delta x)$  приблизно рівна твору щільності вірогідності в точці  $x$  на довжину інтервалу  $\Delta x$  або (на графіці) площі прямокутника з підставою  $\Delta x$  і висотою  $f(x)$ .

Диференціальну функцію розподілу часто називають законом розподілу вірогідності безперервних випадкових величин.

При вирішенні прикладних завдань стикаються з різними законами розподілу вірогідності безперервних випадкових величин. Часто зустрічаються закони рівномірного і нормального розподілу.

## 6.5 Числові характеристики випадкової величини

Закон розподілу повністю характеризує випадкову величину. Проте часто закон розподілу невідомий і доводиться користуватися, так званими, числовими характеристиками випадкової величини. До них відносяться:

- Математичне очікування  $M$
- Дисперсія  $D$
- Середнє квадратичне відхилення  $\sigma$ .

### 6.5.1 Математичне очікування випадкової величини

Математичне очікування дискретної випадкової величини  $X$  – це сума творів всіх її можливих значень  $x_i, i = \overline{1, n}$  на їх вірогідності  $p_i, i = \overline{1, n}$ .

$$M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n \quad (6.3)$$

Математичне очікування безперервної випадкової величини  $X$ , можливе значення якої належить відрізку  $[a, b]$  – це визначений інтеграл

$$M(X) = \int_a^b x f(x) dx \quad (6.4)$$

Математичне очікування випадкової величини (як дискретною, так і безперервною) є не випадкова (постійна) величина. Вона характеризує середнє значення випадкової величини.

Властивості математичного очікування:

- $M(C) = C$  – математичне очікування константи рівне самій константі
- $M(C * X) = C * M(X)$
- $M(X * Y) = M(X) * M(Y)$
- $M(X + Y) = M(X) + M(Y)$

Імовірнісний сенс математичного очікування:

Математичне очікування приблизно рівний середньому арифметичному спостережуваних значень випадкової величини:

$$M(X) \approx \bar{X} = x_1 \frac{m_1}{n} + x_2 \frac{m_2}{n} + \dots + x_k \frac{m_k}{n} = x_1 W_1 + x_2 W_2 + \dots + x_k W_k$$

де:  $m_k$  – частота спостережень,  $W_k$  – відносна частота.

### 6.5.2 Дисперсія і середнє квадратичне відхилення

Дисперсія і середнє квадратичне відхилення – це числові характеристики випадкової величини, які дозволяють оцінити, як розсіяні можливі значення випадкової величини навколо її математичного очікування.

Відхиленням називають різницю між значенням випадкової величини і її математичним очікуванням, тобто  $x_i - M(X)$ .

#### Дисперсія

Дисперсією (розсіянням) випадкової величини (як дискретною, так і безперервною) називають математичне очікування квадрата відхилення випадкової величини від її математичного очікування.

Для дискретної випадкової величини:  $D(X) = M(X - M(X))^2$

Для безперервної випадкової величини:

$$D(X) = \int_a^b (x - M(X))^2 f(x) dx$$

Дисперсія випадкової величини (як дискретною, так і випадковою) є не випадкова (постійна величина).

#### Середнє квадратичне відхилення

Середнім квадратичним відхиленням випадкової величини  $X$  називають квадратний корінь з дисперсії, тобто

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$$

## 6.6 Закон рівномірного розподілу вірогідності безперервної випадкової величини

Закон рівномірного розподілу вірогідності безперервної випадкової величини використовується при імітаційному моделюванні складних систем на ЕОМ як первинна основа для отримання всіх необхідних статистичних моделей. При цьому, якщо спеціально не обумовлений закон розподілу випадкових чисел, то мають зважати на рівномірний розподіл.

Розподіл вірогідності називають рівномірним, якщо на інтервалі **(a, b)**, якому належать всі можливі значення випадкової величини, диференціальна функція розподілу має постійне значення, тобто  $f(x) = C$ .

Оскільки

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b Cdx = 1$$

то

$$C = \frac{1}{\int_a^b dx} = \frac{1}{b-a}$$

Звідси закон рівномірного розподілу аналітично можна записати так:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < a; \\ \frac{1}{b-a}, & a \leq x \leq b; \\ 0, & x > b. \end{cases}$$

Графік диференціальної функції рівномірного розподілу вірогідності представлений рисунку 6.5.

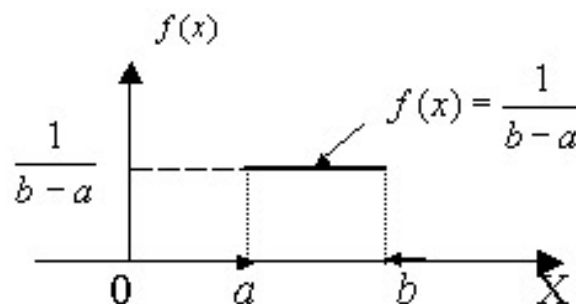


Рисунок 6.5 – Графік диференціальної функції рівномірного розподілу вірогідності

Інтегральну функцію рівномірного розподілу аналітично можна записати так:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq a, \text{ т.к. здесь } f(x) = 0; \\ \frac{x-a}{b-a}, & \text{если } a < x \leq b, \text{ т.к. } F(x) = \int_a^x \frac{1}{b-a} dx = \frac{x-a}{b-a}; \\ 1, & \text{если } x > b, \text{ т.к. } F(x) = \frac{b-a}{b-a} = 1. \end{cases}$$

Графік інтегральної функції рівномірного розподілу вірогідності представлений на рисунку 6.6.

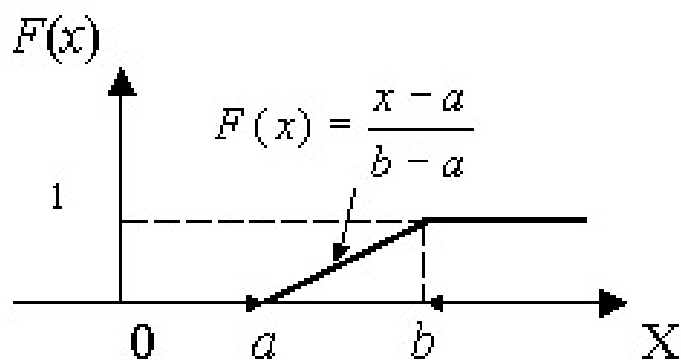


Рисунок 6.6 – Графік інтегральної функції рівномірного розподілу вірогідності

## 6.7 Нормальний закон розподілу вірогідності безперервної випадкової величини

Закон нормального розподілу вірогідності безперервної випадкової величини займає особливе місце серед різних теоретичних законів, оскільки є основним в багатьох практичних дослідженнях, їм описуються більшість випадкових явищ, пов'язаних з виробничими процесами.

До випадкових явищ, що підкоряються нормальному закону розподілу, відносяться помилки вимірювань виробничих параметрів, розподіл технологічних погрешностей виготовлення, зростання і вага більшості біологічних об'єктів, розподіл параметрів плівкових резисторів і ін.

Нормальним називають закон розподілу вірогідності безперервної випадкової величини, який описується диференціальною функцією

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} \quad (6.5)$$

де  $a$  – математичне очікування випадкової величини;

$\sigma$  - середнє квадратичне відхилення нормального розподілу.

Графік диференціальної функції нормального розподілу називають нормальній кривій (крива Гауса) (рис. 6.7).



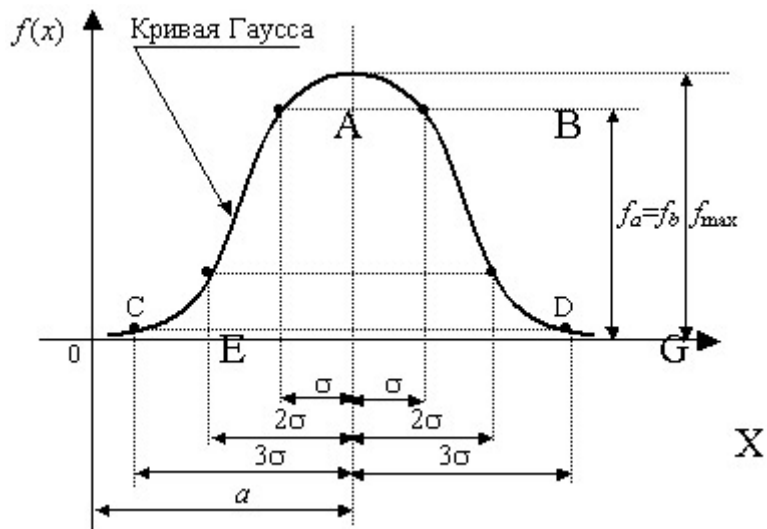


Рисунок 6.7 – Графік диференціальної функції нормального розподілу (крива Гауса)

Властивості нормальної кривої (кривій Гауса):

- Крива симетрична відносно прямою  $x = a$ .
- Нормальна крива розташована над віссю  $X$ , тобто при всіх значеннях  $X$  функція  $f(x)$  завжди позитивна.

- Вісь  $X$  є горизонтальною асимптотою графіка, оскільки

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} f(x) = 0$$

- При  $x = a$  функція  $f(x)$  має максимум рівний

$$f_{max} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \approx \frac{0,4}{\sigma}$$

- В точках  $A$  і  $B$  при  $x = a - \sigma$  і  $x = a + \sigma$  крива має точки перегину, ординати яких рівні.

$$f_A = f_B = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi e}} \approx 0,6 \cdot f_{max} \approx \frac{0,24}{\sigma}$$

При цьому, вірогідність того, що абсолютна величина відхилення випадкової величини, розподіленої нормально, від її математичного очікування не перевищить середнього квадратичного відхилення  $\sigma$  рівна 0,6826.

В точках  $E$  і  $G$ , при  $x = a - 2\sigma$  і  $x = a + 2\sigma$  значення функції  $f(x)$  рівне

$$f_E = f_G = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-2} \approx \frac{0,05}{\sigma}$$

а вірогідність того, що абсолютна величина відхилення випадкової величини, розподіленої нормально, від її математичного очікування не перевищить подвоєного середнього квадратичного відхилення, рівна 0,9544.

Асимптотично наближаючись до осі абсцис, крива Гауса в точках **C** і **D**, при  $x = a - 3\sigma$  і  $x = a + 3\sigma$  дуже близько підходить до осі абсцис. У цих точках значення функції **f(x)** дуже мало

$$f_C = f_D = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\left(\frac{9}{2}\right)} \approx \frac{0,0044}{\sigma}$$

а вірогідність того, що абсолютна величина відхилення випадкової величини, розподіленої нормально, від її математичного очікування не перевищить потрійного середнього квадратичного відхилення, рівна 0,9973. Це властивість кривої Гауса називається "Правило трьох сигм".

Зміна величини параметра  $a$  не змінює форму нормальної кривої, а приводить лише до її зсуву уздовж осі **X**: управо, якщо  $a$  зростає, і вліво, якщо  $a$  убуває.

При  $a=0$  нормальна крива симетрична щодо осі ординат.

Зміна величини параметра  $\sigma$  (середнього квадратичного відхилення) змінює форму нормальної кривої: із зростанням  $\sigma$  ординати нормальної кривої убувають, крива розтягується уздовж осі **X** і притискається до неї. При убуванні  $\sigma$  ординати нормальної кривої збільшуються, крива стискається уздовж осі **X** і стає більш "гостровершинна".

При цьому, при будь-яких значеннях  $a$  і  $\sigma$  площа обмежена нормальною кривою і віссю **X**, залишається рівній одиниці (тобто вірогідність того, що випадкова величина, розподілена нормально, прийме значення обмежене на осі **X** нормальної кривої, рівна 1).

Нормальний розподіл з довільними параметрами  $a$  і  $\sigma$ , тобто описуване диференціальною функцією

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

називається загальним нормальним розподілом.

Нормальний розподіл з параметрами  $a = 0$  і  $\sigma = 1$  тобто описуване диференціальною функцією

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \quad (6.6)$$

називається нормованим розподілом (рис. 6.8). У нормованому розподілі диференціальна функція розподілу рівна:

$$f_m ax \approx 0,4; f_A = f_B \approx 0,24; f_C = f_D \approx 0,0044; f_E = f_G \approx 0,05$$

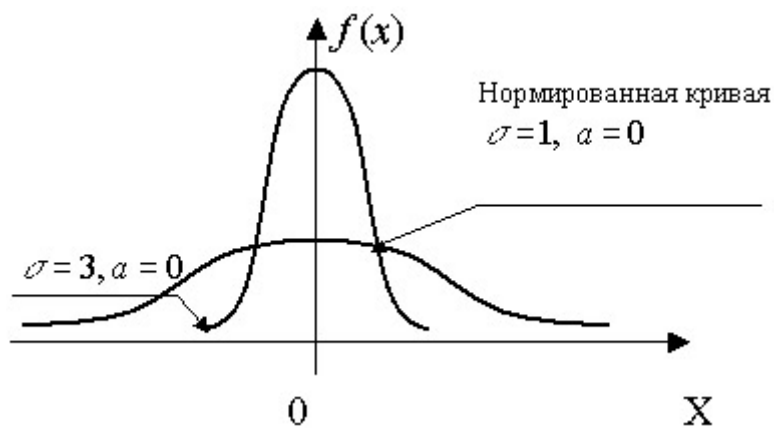


Рисунок 6.8 – Нормований розподіл

Інтегральна функція загального нормального розподілу має вигляд:

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(z-a)^2}{2\sigma^2}} dx \quad (6.7)$$

Інтегральна функція нормованого розподілу має вигляд:

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz \quad (6.8)$$

де

$$z = \frac{x - a}{\sigma}$$

## 6.8 Показовий закон розподілу вірогідності безперервної випадкової величини

Експоненціальний або показовий розподіл — абсолютно безперервний розподіл, що моделює час між двома послідовними звершеннями однієї і тієї ж події.

Щільність розподілу:

$$p(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ \lambda \cdot e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \end{cases}$$

Де  $\lambda > 0$ .

Числові характеристики:  $M(X) = \frac{1}{\lambda}$ ,  $D(X) = \frac{1}{\lambda^2}$

Щільність розподілу при різних значеннях  $\lambda$ .

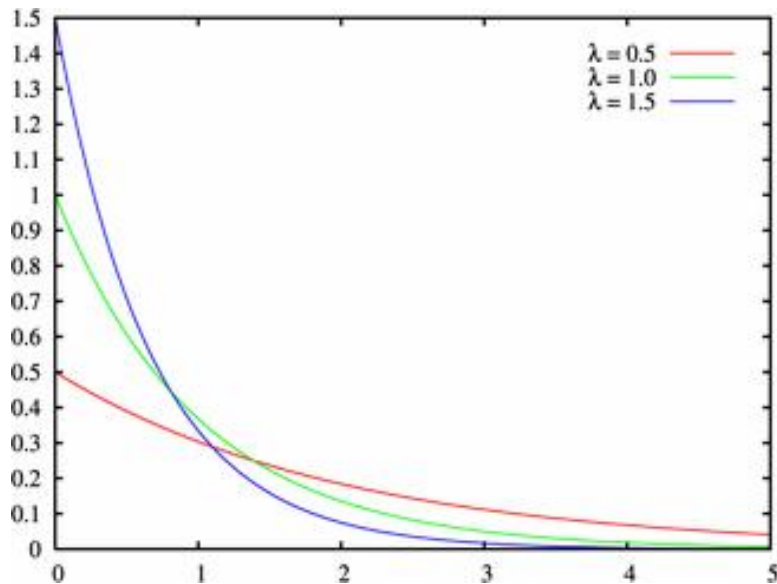


Рисунок 6.9. – Показовий розподіл випадкової величини

### Контрольні питання:

1. Поняття випадкової величини. Яку величину називають дискретною, а яку безперервною і чому?
2. Закон розподілу дискретної випадкової величини. Види завдання закону розподілу дискретної випадкової величини.
3. Інтегральна функція розподілу випадкової величини. Геометричний сенс. Властивості інтегральної функції розподілу випадкової величини
4. Диференціальна функція розподілу випадкової величини. Властивості.
5. Числові характеристики випадкової величини. Математичне очікування. Властивості математичного очікування
6. Дисперсія (визначення)
7. Середньоквадратичне відхилення
8. Закон рівномірного розподілу вірогідності безперервної випадкової величини
9. Нормальний закон розподілу вірогідності безперервної випадкової величини (крива Гауса). Властивості нормальної кривої (кривій Гауса)
10. Показовий закон розподілу вірогідності безперервної випадкової величини

## 7. МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ МОДЕЛЮВАННЯ ПРИ ОБРОБЦІ ДАНИХ

Будь-якому фахівцеві в своїй практичній діяльності доводиться вивчати залежності між різними параметрами досліджуваних об'єктів, процесів і систем.

Наприклад: залежність числа оборотів двигуна від навантаження, тобто  $n=f(M_{кр.})$ ; залежність сили різання при обробці деталі на металоріжучому верстаті від глибини різання, тобто  $P=f(t)$ , і так далі

Зі всіх способів завдання залежностей найбільш зручним є аналітичний спосіб завдання залежності у вигляді функції  $n=f(M_{кр.})$ ,  $P=f(t)$ ,  $y=f(t)$ .

Проте на практиці фахівець найчастіше отримує залежності між досліджуваними параметрами експериментально. В цьому випадку ставиться натурний експеримент, змінюються значення параметрів на вході системи, вимірюються значення параметрів на виході системи. Результати вимірювань заносяться в таблицю.

Таким чином, в результаті проведення натурального експерименту отримуємо залежності між досліджуваними параметрами у вигляді таблиці, тобто отримуємо, так звану, табличну функцію.

Далі з цією табличною функцією необхідно вести науково-дослідні розрахунки.

Розглянемо два завдання по обробці дослідних даних:

- завдання інтерполяції
- завдання апроксимації.

### 7.1 Інтерполяція функцій

Дана таблична функція, тобто дана таблиця, в якій для деяких дискретних значень аргументу  $x_i$ , розташованих в порядку зростання, задані відповідні значення функції  $y_i$ :

i	x	y
0	$x_0$	$y_0$
1	$x_1$	$y_1$
2	$x_2$	$y_2$
...	...	...
i	$x_i$	$y_i$
...	...	...
n	$x_n$	$y_n$

$$y_i = f(x_i), i = \overline{0, n} \quad (7.1)$$

Точки з координатами  $(x_i, y_i)$  називаються вузловими точками або вузлами.

Кількість вузлів в табличній функції рівна  $N=n+1$ .

На графіці таблична функція представляється у вигляді сукупності вузлових точок (рис. 7.1).

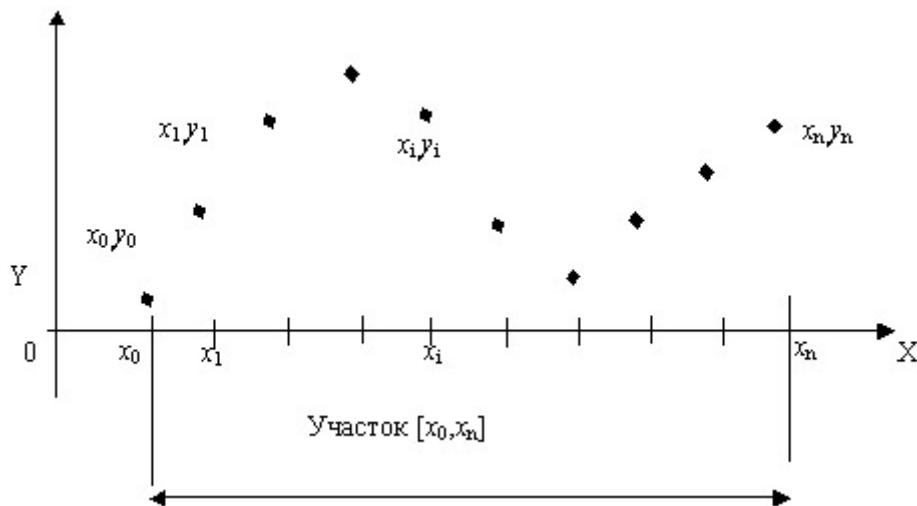


Рисунок 7.1 – Таблична функція представлена у вигляді вузлових точок

Довжина ділянки  $[x_0, x_n]$  дорівнює  $(x_n - x_0)$ .

функції для аргументів, які відсутні в таблиці, – такі завдання називаються завданнями інтерполяції або екстраполювання.

Завдання інтерполяції функції (або завдання інтерполяції) полягає в тому, щоб знайти значення  $y_k$  табличної функції в будь-якій проміжній точці  $x_k$ , розташованою усередині інтервалу  $[x_0, x_n]$ , тобто

$$x_1 < x_k < x_{i+1} \text{ і } x_k \in [x_0; x_n]$$

Завдання екстраполювання функції (або завдання екстраполяції) полягає в тому, щоб знайти значення  $y_i$  табличної функції в точці  $x_i$ , яка не входить в інтервал  $[x_0, x_n]$ , тобто:

$$x_1 < x_0; x_1 > x_n$$

Таке завдання часто називають завданням прогнозу.

Обидві ці завдання вирішуються за допомогою знаходження аналітичного виразу деякій допоміжній функції  $F(x)$ , яка наближала б задану табличну функцію, тобто у вузлових точках приймала б значення табличних функцій

$$F(x) = y_i; i = 1, 2, \dots, n$$

Для визначеності завдання шукану функцію  $F(x)$  шукатимемо з класу многочленів алгебри:

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x^1 + a_nx^0 \quad (7.2)$$

Цей многочлен повинен пройти через всі вузлові точки, тобто

$$P_n(x_i) = y_i \quad (7.3)$$

Тому ступінь многочлена  $n$  залежить від кількості вузлових точок  $N$  і рівна кількості вузлових точок мінус один, тобто  $n=N-1$ .

Многочлен вигляду (7.2), який проходить через всі вузлові точки табличної функції називається інтерполяційним многочленом.

Інтерполяція за допомогою многочленів алгебри називається параболічною інтерполяцією.

Таким чином, для вирішення завдання інтерполяції перш за все необхідно вирішити задачу, яку можна сформулювати таким чином:

для функції  $F(x_i) = y_i; i = 0, 1, 2, \dots, n$ , заданою табличний, побудувати інтерполяційний многочлен ступеня  $n$ , який проходить через всі вузлові точки таблиці:

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x^1 + a_nx^0$$

де

$n$  – ступінь многочлена, рівна кількості вузлових точок  $N$  мінус один, тобто  $n=N-1$ .

В результаті, в будь-якій іншій проміжній точці  $x_k$ , розташованою усередині відрізка  $[x_0, x_n]$  виконується наближена рівність  $P_n(x_k) = f(x_k) = y_k$ . (рис.7.2)

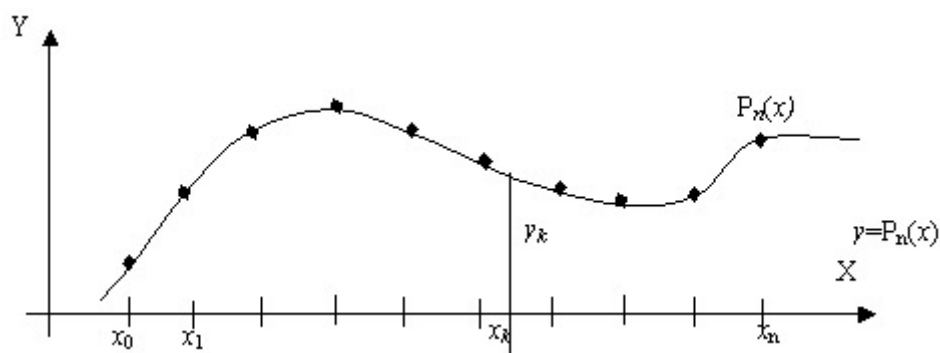


Рисунок 7.2 – Побудований інтерполяційний многочлен ступеня  $n$ , який проходить через всі вузлові точки

## 7.2 Побудова інтерполяційного многочлена в явному вигляді

Для побудови інтерполяційного многочлена вигляду (7.2) необхідно визначити його коефіцієнти  $a_0, a_1, \dots, a_n$ , тобто  $a_i, i=0,1,2,\dots,n$ . Кількість невідомих коефіцієнтів рівна  $n+1=N$ ,

де

$n$  – ступінь многочлена (7.2),

$N$  – кількість вузлових точок табличної функції (7.1).

Для знаходження коефіцієнтів, використовуємо властивість (7.3) інтерполяційного многочлена (7.2). На підставі цієї властивості інтерполяційний многочлен повинен пройти через кожен вузлову точку  $(x_i, y_i)$  таблиці 7.1, тобто,

$$Pa_0x_i^n + a_1x_i^{n-1} + a_2x_i^{n-2} + \dots + a_{n-1}x_i^1 + a_nx_i^0, i = 0,1,\dots,n \quad (7.4)$$

Підставляючи в (7.4) кожен вузлову точку таблиці 7.1 отримуємо систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} a_0x_0^n + a_1x_0^{n-1} + \dots + a_{n-1}x_0 + a_n = y_0 \\ a_0x_1^n + a_1x_1^{n-1} + \dots + a_{n-1}x_1 + a_n = y_1 \\ \dots \\ a_0x_n^n + a_1x_n^{n-1} + \dots + a_{n-1}x_n + a_n = y_n \end{cases} \quad (7.5)$$

Невідомими системи (7.5) є  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$  тобто коефіцієнти многочлена (7.2). Коефіцієнти при невідомих системи (7.5)

$x_i^n, x_i^{n-1}, \dots, x_i^0, i = 0,1,\dots,n, i, \dots, n$  легко можуть бути визначені на підставі даних таблиці 7.1.

## 7.3 Інтерполяція по Лагранжу

Інтерполяційний многочлен може бути побудований за допомогою спеціальних інтерполяційних формул Лагранжа, Ньютона, Стерлінгу, Бесселя і ін.

Інтерполяційний многочлен по формулі Лагранжа має вигляд:



$$\begin{aligned}
L_n(x) = & \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\dots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)\dots(x_0-x_n)} \cdot y_0 + \\
& + \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)\dots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)\dots(x_1-x_n)} \cdot y_1 + \\
& + \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)\dots(x-x_n)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)\dots(x_2-x_n)} \cdot y_2 + \\
& + \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)(x_n-x_2)\dots(x_n-x_{n-1})} \cdot y_n
\end{aligned} \tag{7.6}$$

Доведемо, що многочлен Лагранжа є інтерполяційним многочленом, що проходить через всі вузлові точки, тобто у вузлах інтерполяції  $x_i$  виконується умова  $L_n(x_i) = y_i$ . Для цього послідовно підставлятимемо значення координат вузлових точок таблиці 7.1 в многочлен (7.6). В результаті отримаємо:

якщо  $x=x_0$ , то  $L_n(x_0) = y_0$ ,

якщо  $x=x_1$ , то  $L_n(x_1) = y_1$ ,

.....

якщо  $x=x_n$ , то  $L_n(x_n) = y_n$ .

Це досягнуто за рахунок того, що в чисельнику кожного дроби при відповідному значенні  $y_j$ ,  $j=0,1,2, \dots, n$  відсутній співмножник  $(x-x_i)$ , в якому  $i=j$ , а знаменник кожного дроби отриманий заміною змінною  $x$  на відповідне значення  $x_j$ .

Таким чином, інтерполяційний многочлен Лагранжа наближає задану табличну функцію, тобто  $L_n(x_i) = y_i$  і ми можемо використовувати його як допоміжну функцію для вирішення завдань інтерполяції, тобто  $L_n(x_k) \approx y_k$ .

Чим більше вузлів інтерполяції на відрізку  $[x_0, x_n]$ , тим точніше інтерполяційний многочлен наближає задану табличну функцію (7.1), тобто тим точніше рівність:

$$f(x_k) \approx L_n(x_k)$$

Проте із збільшенням числа вузлів інтерполяції зростає ступінь інтерполяційного многочлена  $n$  і в результаті значного зростає об'єм обчислювальної роботи. Тому при великому числі вузлів необхідно застосовувати ЕОМ. В цьому випадку зручно знаходити значення функції в проміжних крапках, не отримуючи многочлен в явному вигляді.

При рішенні задачі екстраполявання функції за допомогою інтерполяційного многочлена обчислення значення функції за межами відрізка  $[x_0, x_n]$  зазвичай проводять не далі, чим на один крок  $h$ , рівний

найменшій величині  $|x_{i+1} - x_i|$  оскільки за межами відрізання  $[x_0, x_n]$  погрішності, як правило, збільшуються.

## 7.4 Інтерполяція по Ньютону

Дана таблична функція:

i	$x_i$	$y_i$
0	$x_0$	$y_0$
1	$x_1$	$y_1$
2	$x_2$	$y_2$
...	...	...
n	$x_n$	$y_n$

або

$$y_i = f(x_i), i = \overline{0, n} \quad (7.7)$$

Точки з координатами  $(x_i, y_i)$  називаються вузловими точками або вузлами.

Кількість вузлів в табличній функції рівна  $N=n+1$ .

Необхідно знайти значення цієї функції в проміжній крапці, наприклад,  $x=D$ , причому  $D \in [x_0, x_n]$ .

Для вирішення завдання будемо інтерполяційний многочлен.

Інтерполяційний многочлен по формулі Ньютонa має вигляд:

$$\begin{aligned} L_n(x) = & f(x_0) + (x - x_0) \cdot f(x_0, x_1) + \\ & + (x - x_0)(x - x_1) \cdot f(x_0, x_1, x_2) + \\ & + (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \cdot f(x_0, x_1, x_2, x_3) + \\ & + (x - x_0)(x - x_1) \cdot \dots \cdot (x - x_{n-1}) \cdot f(x_0, x_1, \dots, x_n) \end{aligned} \quad (7.8)$$

де

$n$  – ступінь многочлена,

$f(x_0), f(x_0, x_1), f(x_0, x_1, x_2), f(x_0, x_1, \dots, x_n)$  - розділені різниці 0-го, 1-го, 2-го, ..., n-го порядку, відповідно.

## 7.5 Розділені різниці

Значення  $f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n)$ , тобто значення табличної функції у вузлах, називаються розділеними різницями нульового порядку ( $k=0$ ).

Відношення  $f(x_0, x_1) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$  називається розділеною різницею

першого порядку (**k=1**) на ділянці  $[x_0, x_1]$  і рівне різниці розділених різниць нульового порядку на кінцях ділянки  $[x_0, x_1]$ , розділеною на довжину цієї ділянки.

Для довільної ділянки  $[x_i, x_{i+1}]$  розділена різниця першого порядку (**k=1**) рівна

$$f(x_i, x_{i+1}) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}$$

Відношення  $f(x_0, x_1, x_2) = \frac{f(x_1, x_2) - f(x_0, x_1)}{x_2 - x_0}$  називається розділеною

різницею другого порядку (**k=2**) на ділянці  $[x_0, x_2]$  і дорівнює різниці розділених різниць першого порядку, розділеній на довжину ділянки  $[x_0, x_2]$ .

Для довільної ділянки  $[x_i, x_{i+2}]$  розділена різниця другого порядку (**k=2**) дорівнює

$$f(x_i, x_{i+1}, x_{i+2}) = \frac{f(x_{i+1}, x_{i+2}) - f(x_i, x_{i+1})}{x_{i+2} - x_i}$$

Таким чином, розділена різниця **k**-го порядку на ділянці  $[x_i, x_{i+k}]$  може бути визначена через розділені різниці (**k-1**)-го порядку по рекурентній формулі:

$$f(x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_{i+k}) = \frac{f(x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_{i+k}) - f(x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k-1})}{x_{i+k} - x_i} \quad (7.9)$$

де  $k = \overline{1, n}$ ;  $i = \overline{0, n-k}$ ; **n** – ступінь многочлена.

Максимальне значення **k** рівне **n**. Тоді **i=0** і розділена різниця **n**-го порядку на ділянці  $[x_0, x_n]$  рівна

$$f(x_0, x_1, \dots, x_n) = \frac{f(x_1, x_2, \dots, x_n) - f(x_0, x_1, \dots, x_{n-1})}{x_n - x_0}, \text{ тобто рівна різниці}$$

розділених різниць (**n-1**)-го порядку, розділеній на довжину ділянки  $[x_0, x_n]$ .

Розділені різниці  $f(x_0, x_1), f(x_0, x_1, x_2), \dots, f(x_0, x_1, \dots, x_n)$  є цілком певними числами, тому вираз (7.8) дійсно є многочленом алгебри **n**-й ступеня. При цьому в многочлені (7.8) всі розділені різниці визначені для ділянок  $[x_0, x_{0+k}]$ ,  $k = \overline{1, n}$ .

Лема: алгебраїчний многочлен (7.8), побудований за формулами Ньютона, дійсно є інтерполяційним многочленом, тобто значення многочлена у

вузлових точках рівне значенню табличної функції

$$L_n(x_i) = f(x_i) = y_i; i = 0, 1, \dots, n.$$

Доведемо це. Хай  $x=x_0$ , тоді многочлен (7.8) рівний

$$L_n(x_0) = f(x_0) = y_0.$$

Хай  $x=x_1$ , тоді многочлен (7.8) рівний

$$\begin{aligned} L_n(x_1) &= f(x_0) + (x_1 - x_0) \cdot f(x_0, x_1) = \\ &= f(x_0) + (x_1 - x_0) \cdot \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = f(x_1) = y_1 \end{aligned}$$

Хай  $x=x_2$ , тоді многочлен (7.7) рівний

$$\begin{aligned} L_n(x_2) &= f(x_0) + (x_2 - x_0) \cdot f(x_0, x_1) + (x_2 - x_0)(x_2 - x_1) \cdot f(x_0, x_1, x_2) = \\ &= f(x_0) + (x_2 - x_0) \frac{f(x_1) - f(x_0)}{(x_1 - x_0)} + (x_2 - x_0)(x_2 - x_1) \frac{f(x_1; x_2) - f(x_0; x_1)}{(x_2 - x_0)} = \\ &= f(x_2) = y_2 \end{aligned}$$

Відмітимо, що рішення задачі інтерполяції по Ньютону має деякі переваги в порівнянні з рішенням задачі інтерполяції по Лагранжу. Кожен доданок інтерполяційного многочлена Лагранжа залежить від всіх значень табличної функції  $y_i, i=0, 1, \dots, n$ . Тому при зміні кількості вузлових точок  $N$  і ступені многочлена  $n$  ( $n=N-1$ ) інтерполяційний многочлен Лагранжа потрібно будувати наново. У многочлені Ньютона при зміні кількості вузлових точок  $N$  і ступені многочлена  $n$  потрібно тільки додати або відкинути відповідне число стандартних доданків у формулі Ньютона (7.8). Це зручно на практиці і прискорює процес обчислень.

### Контрольні питання:

1. Що є завдання інтерполяції і завдання екстраполювання функцій?
2. Які властивості інтерполяційного многочлена?
3. Запишіть умови побудови інтерполяційного многочлена в явному вигляді
4. Запишіть інтерполяційний многочлен по формулі Лагранжа

5. Як залежить ступінь інтерполяційного многочлена по формулі Лагранжа від числа вузлів?
6. Проблема екстраполявання по формулі Лагранжа
7. Запишіть інтерполяційний многочлен по формулі Ньютона
8. Як обчислюються розділені різниці інтерполяційного многочлена по формулі Ньютона?
9. Доказ що многочлен, побудований по формулах Ньютона, дійсно є інтерполяційним многочленом

## 8. СПЛАЙНИ. РАЦІОНАЛЬНА ІНТЕРПОЛЯЦІЯ

### 8.1 Сплайн – інтерполяція

Сплайн — функція, область визначення якої розбита на кінцеве число відрізків, на кожному з яких сплайн співпадає з деяким многочленом алгебри. Максимальний ступінь з використаних поліномів називається ступенем сплайна

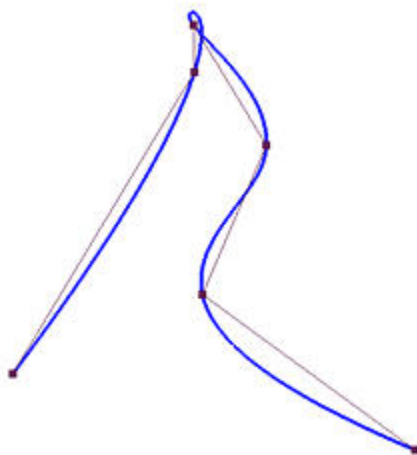


Рисунок 8.1. – Приклад сплайн апроксимації

Інтерполяція сплайнами третього порядку – це швидкий, ефективний і стійкий спосіб інтерполяції функцій. Нарівні з раціональною інтерполяцією, сплайн-інтерполяція є однією з альтернатив поліноміальної інтерполяції.

У основі сплайн-інтерполяції лежить наступний принцип. Інтервал інтерполяції розбивається на невеликі відрізки, на кожному з яких функція задається поліномом третього ступеня. Коефіцієнти полінома підбираються так, щоб виконувалися певні умови (які саме, залежить від способу інтерполяції). Загальні для всіх типів сплайнів третього порядку вимоги – безперервність функції і, зрозуміло, проходження через наказані нею крапки. Додатковими вимогами можуть бути лінійність функції між вузлами, безперервність вищих похідних і так далі

Основними перевагами сплайн-інтерполяції є її стійкість і мала трудомісткість. Системи лінійних рівнянь, які потрібно вирішувати для побудови сплайнів, дуже добре обумовлені, що дозволяє отримувати коефіцієнти поліномів з високою точністю. В результаті навіть при дуже великих  $N$  обчислювальна схема не втрачає стійкості. Побудова таблиці

коефіцієнтів сплайна вимагає  $O(N)$  операцій, а обчислення значення сплайна в заданій точці – всього лише  $O(\log(N))$ .

## 8.2 Монотонність функцій (допоміжне питання)

Функція  $f(x)$  називається такою, що зростає на проміжку  $D$ , якщо для будь-яких чисел  $x_1$  і  $x_2$  з проміжку  $D$  таких, що  $x_1 < x_2$ , виконується нерівність  $f(x_1) < f(x_2)$ .

Функція  $f(x)$  називається такою, що убиває на проміжку  $D$ , якщо для будь-яких чисел  $x_1$  і  $x_2$  з проміжку  $D$  таких, що  $x_1 < x_2$ , виконується нерівність  $f(x_1) > f(x_2)$ .

На показаному на малюнку графіку функція  $y = f(x)$ ,  $x \in [a; b]$  зростає на кожному з проміжків  $[a; x_1]$  і  $(x_2; b]$  і убиває на проміжку  $(x_1; x_2)$ . Звернете увагу, що функція зростає на кожному з проміжків  $[a; x_1]$  і  $(x_2; b]$ , але не на об'єднанні проміжків

$$[a; x_1] \cup (x_2; b]$$

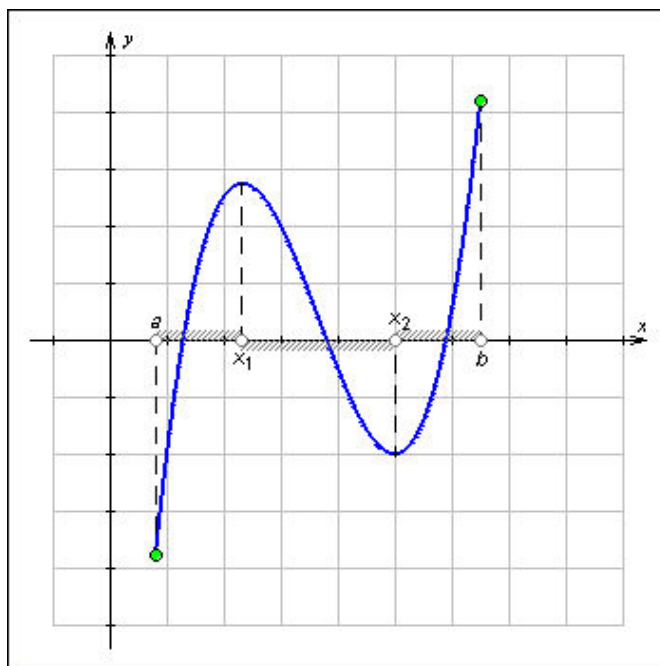


Рисунок 8.2 – Проміжки зростання і убивання функції

Якщо функція зростає або убиває на деякому проміжку, то вона називається монотонною на цьому проміжку.

Відмітимо, що якщо  $f$  – монотонна функція на проміжку  $D(f(x))$ , то рівняння  $f(x) = \text{const}$  не може мати більш за один корінь на цьому проміжку.

Дійсно, якщо  $x_1 < x_2$  – коріння цього рівняння на проміжку  $D(f(x))$ , то  $f(x_1) = f(x_2) = 0$ , що викликає протиріччя умові монотонності.

Перерахуємо властивості монотонних функцій (передбачається, що всі функції визначені на деякому проміжку  $D$ ).

- Сума декількох зростаючих функцій є зростаючою функцією.
- Множення ненегативних зростаючих функцій є зростаюча функція.
- Якщо функція  $f$  зростає, то функції  $cf$  ( $c > 0$ ) і  $f + c$  також зростають, а функція  $cf$  ( $c < 0$ ) убиває. Тут  $c$  – деяка константа.
- Якщо функція  $f$  зростає і зберігає знак, то функція  $1/f$  убиває.
- Якщо функція  $f$  зростає і ненегативна, то  $f^n$  де  $n \in N$ , також зростає.
- Якщо функція  $f$  зростає і  $n$  – непарне число, то  $f^n$  також зростає.
- Композиція  $g(f(x))$  зростаючих функцій  $f$  і  $g$  також зростає.

Аналогічні твердження можна сформулювати і для убиваючої функції.

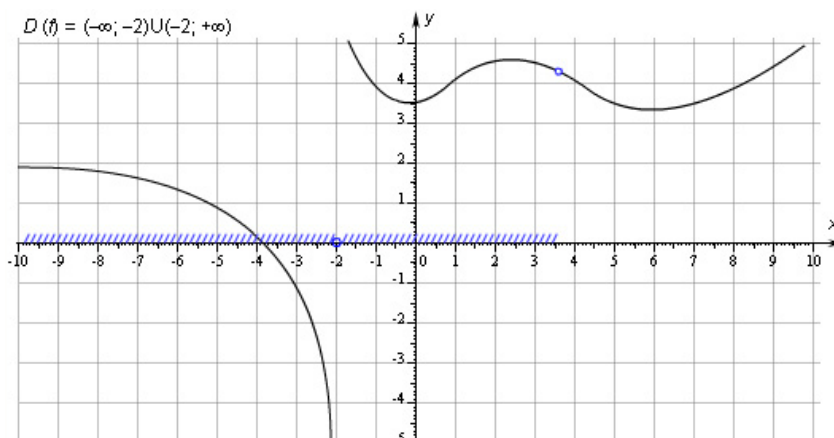


Рисунок 8.3 – Властивості функції

Точка  $a$  називається точкою максимуму функції  $f$ , якщо існує така  $\varepsilon$ -околиця точки  $a$ , що для будь-якого  $x$  з цієї околиці виконується нерівність  $f(a) \geq f(x)$ .

Точка називається точкою мінімуму функції  $f$ , якщо існує така  $\varepsilon$ -околиця точки  $a$ , що для будь-якого  $x$  з цієї околиці виконується нерівність  $f(a) \leq f(x)$ .

Точки, в яких досягається максимум або мінімум функції, називаються точками екстремуму.

У точці екстремуму відбувається зміна характеру монотонності функції. Так, зліва від точки екстремуму функція може зростати, а справа – убивати. Згідно визначенню, точка екстремуму повинна бути внутрішньою точкою області визначення.



Якщо для будь-якого  $x \in D$  ( $x \neq a$ ) виконується нерівність  $f(x) \leq f(a)$  ( $a \in D$ ) то точка  $a$  називається точкою найбільшого значення функції на множині  $D$ :

$$\max_{x \in D} f(x) = f(a)$$

Якщо для будь-якого  $x \in D$  ( $x \neq b$ ) виконується нерівність  $f(x) > f(b)$  ( $b \in D$ ) то точка  $b$  називається точкою найменшого значення функції на множині  $D$ .

$$\min_{x \in D} f(x) = f(b)$$

Точка найбільшого або найменшого значення може бути екстремумом функції, але не обов'язково їм є.

Точку найбільшого (найменшого) значення безперервної на відрізку функції слід шукати серед екстремумів цієї функції і її значень на кінцях відрізання.

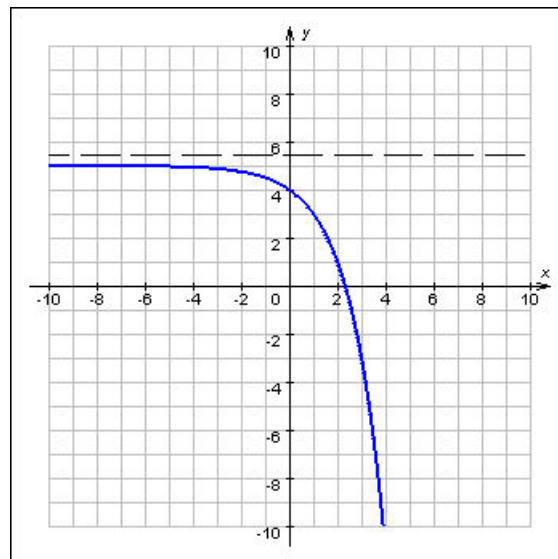


Рисунок 8.4 – Функція, обмежена зверху

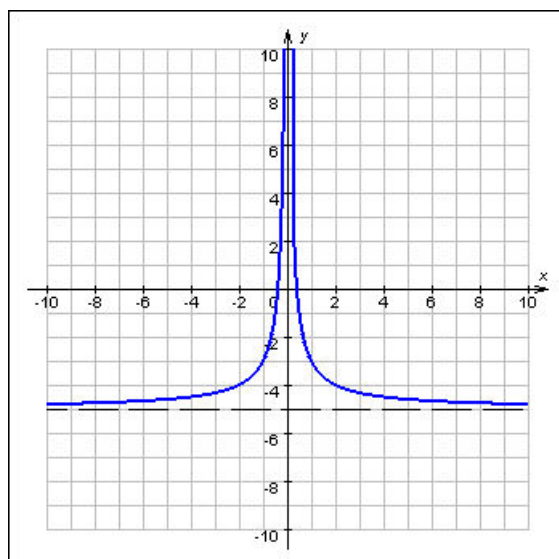


Рисунок 8.5 – Функція, обмежена знизу

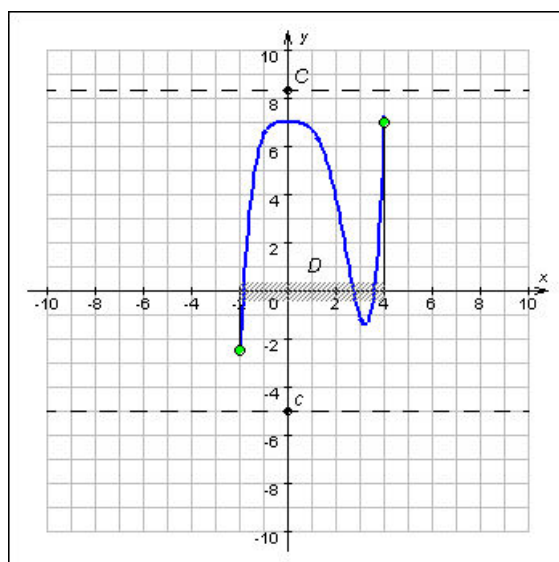


Рисунок 8.6 – Функція, обмежена на множині  $D$ .

Якщо існує число  $C$  таке, що для будь-якого  $x \in D$  виконується нерівність  $f(x) \leq C$ , то функція  $f$  називається обмеженою зверху на множині  $D$ .

Якщо існує число  $c$  таке, що для будь-якого  $x \in D$  виконується нерівність  $f(x) \geq c$ , то функція  $f$  називається обмеженою знизу на множині  $D$ .

Функція, обмежена і зверху, і знизу, називається обмеженою на множині  $D$ . Геометрично обмеженість функції  $f$  на безлічі  $D$  означає, що графік функції  $y = f(x)$ ,  $x \in D$  лежить в смузі  $c \leq y \leq C$ .

Якщо функція не є обмеженою на множині, то говорять, що вона не обмежена.

Прикладом функції, обмеженої знизу на всій числовій осі, є функція  $y = x^2$ . Прикладом функції, обмеженої зверху на множині  $(-\infty; 0)$  є функція  $y = 1/x$ . Прикладом функції, обмеженої на всій числовій осі, є функція  $y = \sin x$ .

## 8.3 Типи сплайнів

### 8.3.1 Лінійний сплайн

Лінійний сплайн - це сплайн, складений з поліномів першого ступеня, тобто з відрізків прямих ліній. Точність інтерполяції лінійними сплайнами невисока, також слід зазначити, що вони не забезпечують безперервності навіть перших похідних. Проте в деяких випадках кусочно-лінійна апроксимація функції може опинитися переважно, чим апроксимація вищого порядку. Наприклад, лінійний сплайн зберігає монотонність переданого в нього набору крапок.

### 8.3.2 Сплайн Ерміта

Сплайн Ерміта – це сплайн третього порядку, похідна якого приймає у вузлах сплайна задані значення. У кожному вузлі сплайна Ерміта задано не тільки значення функції, але і значення її першої похідної. Сплайн Ерміта має безперервну першу похідну, але друга похідна у нього розривна. Точність інтерполяції значно краща, ніж у лінійного сплайна.

### 8.3.3 Сплайн Катмулла-Рома

Сплайн Катмулла-Рома – це сплайн Ерміта, похідні якого визначаються по формулі:

$$S''(x_i) = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{x_{i+1} - x_{i-1}}$$

Як і сплайн Ерміта, сплайн Катмулла-Рома має безперервну першу похідну і розривну другу. Сплайн Катмулла-Рома локальний – значення сплайна залежать тільки від значень функції в чотирьох сусідніх крапках (два зліва, два справа). Можна використовувати два типи граничних умов:

- Сплайн, що завершується параболою. В цьому випадку граничний відрізок сплайна представляється поліномом другого ступеня замість третьої (для внутрішніх відрізків як і раніше використовуються поліноми третього ступеня). У ряді випадків це забезпечує велику точність, чим природні граничні умови.

- Періодичні граничні умови (цей вид граничних умов використовується при моделюванні періодичних функцій).

### 8.3.4 Кубічний сплайн

Всі розглянуті сплайни, є кубічними сплайнами – в тому сенсі, що вони є кусочно-кубічними функціями. Проте, коли говорять "кубічний сплайн", то зазвичай мають на увазі конкретний вид кубічного сплайна, який виходить, якщо зажадати безперервності першою і другою похідних. Кубічний сплайн задається значеннями функції у вузлах і значеннями похідних на межі відрізання інтерполяції (або перших, або других похідних).

Якщо відоме точне значення першої похідної на обох межах, то такий сплайн називають фундаментальним. Погрішність інтерполяції таким сплайном рівна  $O(h^4)$ .

- Якщо значення першої (або другої) похідної на межі невідоме, то можна задати т.з. природні граничні умови  $S''(A)=0$ ,  $S''(B)=0$ , і отримати природний сплайн. Погрішність інтерполяції природним сплайном складає  $O(h^2)$ . Максимум погрішності спостерігається в околицях граничних вузлів, у внутрішніх вузлах точність інтерполяції значно вища.
- Ще одним видом граничної умови, яку можна використовувати, якщо невідомі граничні похідні функції, є умова типу "сплайн, що завершується параболою". В цьому випадку граничний відрізок сплайна представляється поліномом другого ступеня замість третьої (для внутрішніх відрізків як і раніше використовуються поліноми третього ступеня). У ряді випадків це забезпечує велику точність, чим природні граничні умови.
- Можна вказати періодичні граничні умови (цей вид граничних умов використовується при моделюванні періодичних функцій).

Нарешті, можна поєднувати різні типи граничних умов на різних межах (окрім періодичних умов, які повинні бути вказані відразу на двох межах). Зазвичай так має сенс робити, якщо у нас є тільки частина інформації про поведінку функції на межі (наприклад, похідна на лівій межі – і ніякій інформації про похідну на правій межі).

### 8.3.5 Сплайн Акими

Сплайн Акими - це особливий вид сплайна, стійкий до викидів. Недоліком кубічних сплайнів є те, що вони схильні осцилювати в околицях крапки, що істотно відрізняється від своїх сусідів. На графіці приведений набір крапок, що містить один викид. Зеленим кольором позначений кубічний сплайн

з природними граничними умовами. На відрізках інтерполяції, що граничать з викидом, сплайн помітно відхиляється від інтерпольованої функції – позначається вплив викиду. Червоним кольором позначений сплайн Акими. Можна бачити, що, на відміну від кубічного сплайна, сплайн Акими в меншій мірі схильний до впливу викидів – на відрізках, що граничать з викидом, практично відсутні ознаки осциляції.

Важливою властивістю сплайна Акими є його локальність – значення функції на відрізку  $[x_i, x_{i+1}]$  залежать тільки від  $f_{i-2}, f_{i-1}, f_i, f_{i+1}, f_{i+2}, f_{i+3}$ . Другою властивістю, яку слід брати до уваги, є нелінійність інтерполяції сплайнами Акими – результат інтерполяції суми двох функцій не рівний сумі інтерполяційних схем, побудованих на основі окремих функцій. Для побудови сплайна Акими потрібний не менше 5 крапок. У внутрішній області (тобто між  $x_2$  і  $x_{N-3}$  при нумерації крапок від 0 до N-1) погрішність інтерполяції має порядок  $O(h^2)$ .

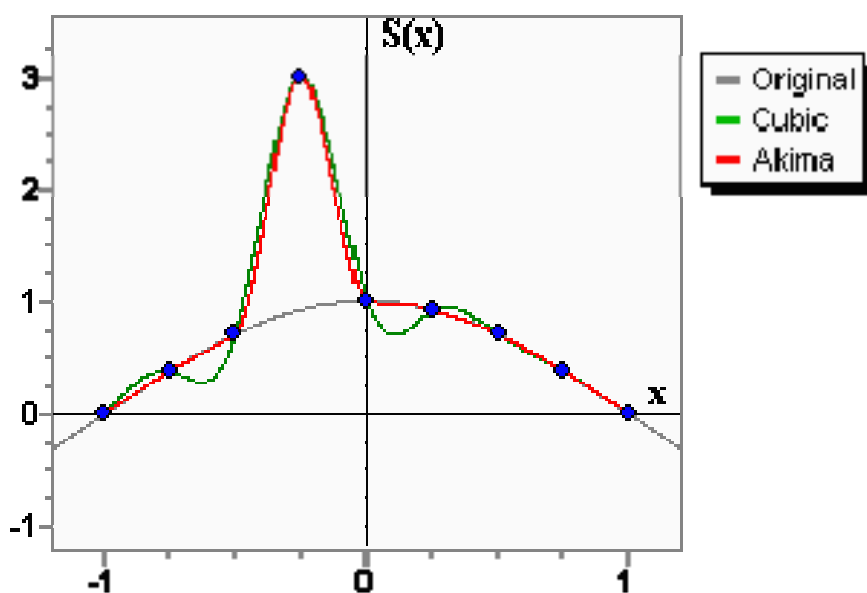


Рисунок 8.7. – Порівняння сплайнів

Сплайни почали широко використовуватися в обчислювальній математиці порівняно недавно. У машинобудівному кресленні вони застосовуються вже давно, оскільки сплайни – це лекала або гнучкі лінійки, деформація яких дозволяє провести криву через задані точки  $(x_i, y_i)$ .

Використовуючи теорію вигину бруса при малих деформаціях, можна показати, що сплайн – це група кубічних многочленів, в місцях сполучення яких перша і друга похідні безперервні. Такі функції називаються кубічними

сплайнами. Для їх побудови необхідно задати коефіцієнти, які єдиним чином визначають многочлен в проміжку між даними крапками.

Наприклад, для деяких функцій (рис. 8.8) необхідно задати всі кубічні функції  $q_1(x), q_2(x), \dots, q_n(x)$ .

У найбільш загальному випадку ці многочлени мають вигляд:

$$q_i(x) = k_{1i} + k_{2i}x + k_{3i}x^2 + k_{4i}x^3, i = \overline{1, n}$$

де  $k_{ij}$  – коефіцієнти, визначувані описаними раніше умовами, кількість яких рівна  $4n$ . Для визначення коефіцієнтів  $k_{ij}$  необхідно побудувати і вирішити систему порядку  $4n$ .

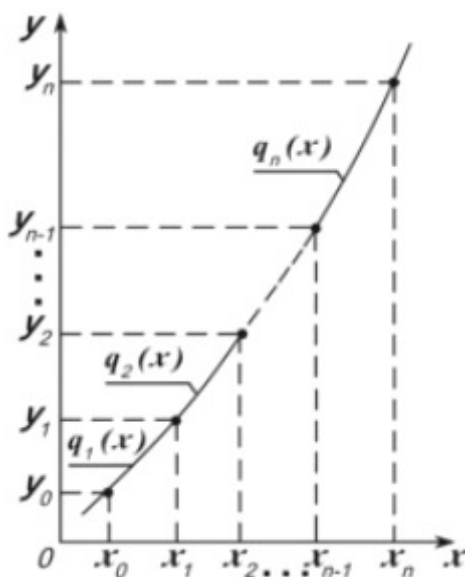


Рисунок 8.8.

Перші  $2n$  умов вимагають, щоб сплайни стикалися в заданих точках:

$$q_i(x_i) = y_i, i = \overline{1, n}; q_{i+1}(x_i) = y_i, i = \overline{0, n-1}$$

Наступні  $(2n-2)$  умов вимагають, щоб в місцях зіткнення сплайнів були рівні перші і другі похідні:

$$q'_{i+1}(x_i) = q'_i(x_i), i = \overline{1, n-1}; q''_{i+1}(x_i) = q''_i(x_i), i = \overline{0, n-1}$$

Система рівнянь алгебри має рішення, якщо число рівнянь відповідає числу невідомих. Для цього необхідно ввести ще два рівняння. Зазвичай використовуються наступні умови:

$$q''_1(x_0) = 0, \dots, q''_n(x_n) = 0$$

При побудові алгоритму методу перші і другі похідні зручно апроксимувати розділеними різницями відповідних порядків.

Отриманий таким чином сплайн називається природним кубічним сплайном. Знайшовши коефіцієнти сплайна, використовують цю шматочно-гладку поліноміальну функцію для представлення даних при інтерполяції.

## 8.4 Раціональна інтерполяція

Раціональна інтерполяція, тобто інтерполяція раціональними функціями, полягає в представленні інтерпольованої функції  $f(x)$  у вигляді відношення двох поліномів:

$$f(x) = \frac{p_0 + p_1x + \dots + p_Lx^L}{q_0 + q_1x + \dots + q_Nx^N}$$

Нарівні із сплайн-інтерполяцією, раціональна інтерполяція є однією з альтернатив поліноміальної інтерполяції. Основним недоліком поліноміальної інтерполяції є те, що вона нестійка на одній з найзручніших і часто використовуваних сіток – сітці з рівновіддаленими вузлами. Якщо дозволяє завдання, цю проблему можна вирішити за рахунок вибору сітки з Чебишевськими вузлами. Якщо ж ми не можемо вільно вибирати вузли інтерполяції або нам просто потрібний алгоритм, не дуже вимогливий до вибору вузлів, то раціональна інтерполяція може виявитися відповідною альтернативою поліноміальної інтерполяції.

### Контрольні питання:

1. Приведіть визначення сплайна
2. Поясніть що таке сплайн-інтерполяція
3. Монотонність функцій (зростання і убуття функцій)
4. Типи сплайнів
5. Лінійний сплайн
6. Сплайн Ерміта
7. Сплайн Катмулла-Рома
8. Кубічний сплайн
9. Сплайн Акими
10. Раціональна інтерполяція

## 9. ІНТЕРПОЛЯЦІЯ. АПРОКСИМАЦІЯ, ЗГЛАДЖУВАННЯ ДАНИХ, МЕТОД НАЙМЕНШИХ КВАДРАТІВ

### 9.1 Апроксимація дослідних даних

В результаті проведення натурального експерименту отримана таблична функція:

i	X	Y
0	x <sub>0</sub>	y <sub>0</sub>
1	x <sub>1</sub>	y <sub>1</sub>
2	x <sub>2</sub>	y <sub>2</sub>
3	x <sub>3</sub>	y <sub>3</sub>
:	:	:
n	x <sub>n</sub>	y <sub>n</sub>

де

**N** – кількість вузлових точок в таблиці, **n=N-1**.

Завдання апроксимації полягає у відшуканні аналітичної залежності **y=f(x)** отриманої табличної функції.

В даний час існує 2 способи апроксимації досвідчених даних:

Перший спосіб. Цей спосіб вимагає, щоб апроксимуюча крива **F(x)**, аналітичний вид якої необхідно знайти, проходила через всі вузлові точки таблиці. Цю задачу можна вирішити за допомогою побудови інтерполяційного многочлена ступеня **n**:

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x^1 + a_n \quad (9.1)$$

Проте цей спосіб апроксимації досвідчених даних має недоліки:

- Точність апроксимації гарантується в невеликому інтервалі **[x<sub>0</sub>, x<sub>n</sub>]** при кількості вузлових точок не більше 7-8.
- Значення табличної функції у вузлових точках повинні бути задані з великою точністю.

Відомо, що як би точно не проводився експеримент, результати експерименту містять погрішності. Річ у тому, що насправді досліджувана величина залежить не тільки від одного аргументу **X**, але і від інших випадкових чинників, які від досвіду до досвіду коливаються по своїх власних випадкових законах. Цим самим обумовлюється випадкова коливається досліджуваної функції.



В результаті апроксимувати досвідчені дані за допомогою інтерполяційного многочлена, який проходив би через всі вузлові точки таблиці, не завжди вдається. Більш того, прагнучи пройти через всі вузлові точки таблиці і збільшуючи порядок многочлена, ми тим самим починаємо відтворювати не тільки закономірні зміни функції, що знімається, але і її випадкові перешкоди.

Другий спосіб. На практиці знайшов застосування інший спосіб апроксимації досвідчених даних – згладжування досвідчених даних. Суть цього методу полягає в тому, що табличні дані апроксимують кривий  $F(x)$ , яка не обов'язково повинна пройти через всі вузлові точки, а повинна як би згладити всі випадкові перешкоди табличної функції.

## 9.2 Згладжування дослідних даних методом найменших квадратів

У цьому методі при згладжуванні досвідчених даних що апроксимує криву  $F(x)$  прагнуть провести так, щоб її відхилення  $\varepsilon_i$  від табличних даних (ухилення) по всіх вузлових точках були мінімальними (рис. 9.1), тобто

$$\varepsilon_i = |F(x_i) - y_i| \rightarrow \min \quad (9.2)$$

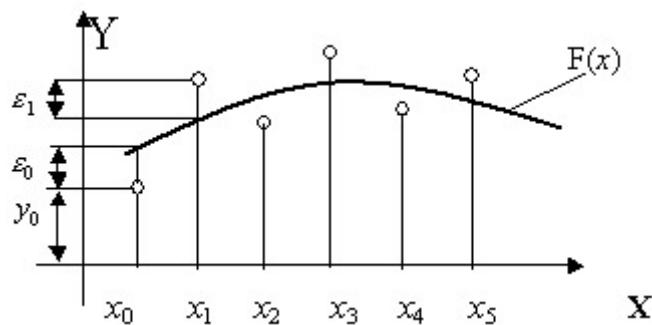


Рисунок 9.1 – Згладжування досвідчених даних апроксимуючою кривою  $F(x)$  з мінімізацією відхилень по всіх вузлових точках

Позбавимося від знаку ухилення. Тоді умова (9.2) матиме вигляд:

$$\varepsilon_i^2 = |(F(x_i) - y_i)|^2 \rightarrow \min \quad (9.3)$$

Суть методу найменших квадратів полягає в наступному: для табличних даних, отриманих в результаті експерименту, відшукати аналітичну залежність  $F(x)$ , сума квадратів ухилень якої від табличних даних по всіх вузлових точках була б мінімальною, тобто

$$\sum_{i=0}^n \varepsilon_i^2 = \sum_{i=0}^n (F(x_i) - y_i)^2 \rightarrow \min \quad (9.4)$$

Для визначеності завдання шукану функцію  $F(x)$  вибиратимемо з класу многочленів алгебри ступеня  $m$ :

$$P_m(x) = a_0x^m + a_1x^{m-1} + a_2x^{m-2} + \dots + a_{m-1}x^1 + a_m \quad (9.5)$$

Назвемо многочлен (9.5) апроксимуючим многочленом. Апроксимуючий многочлен не проходить через всі вузлові точки таблиці. Тому його ступінь  $m$  не залежить від числа вузлових точок. При цьому завжди  $m < n$ . Ступінь  $m$  може мінатися в межах  $1 \leq m \leq N - 2$ .

Якщо  $m=1$ , то ми апроксимуємо табличну функцію прямою лінією. Таке завдання називається лінійною регресією.

Якщо  $m=2$ , то ми апроксимуємо табличну функцію квадратичною параболою. Таке завдання називається квадратичною апроксимацією.

Якщо  $m=3$ , то ми апроксимуємо табличну функцію кубічною параболою. Таке завдання називається кубічною апроксимацією.

Уточнимо метод найменших квадратів: для табличної функції, отриманої в результаті експерименту, побудувати апроксимуючий многочлен (9.5) ступені  $m$ , для якого сума квадратів ухилень по всіх вузлових точках мінімальна, тобто

$$S = \sum_0^n (P_m(x_i) - y_i)^2 \rightarrow \min \quad (9.6)$$

Змінимо вид многочлена  $P_m$ . Поставимо на останнє місце доданки, що містять  $x^m$ . На передостаннє – доданки, що містять  $x^{m-1}$  і т.д. В результаті отримаємо:

$$P_m(x) = a_0x^0 + a_1x^1 + a_2x^2 + \dots + a_mx^m \quad (9.7)$$

або

$$P_m(x) = \sum_{j=0}^m a_j x^j$$

При цьому змінимо індекси коефіцієнтів многочлена. Тоді умова (9.6) матиме вигляд:

$$S = \sum_{i=0}^n (a_0x_i^0 + a_1x_i^1 + a_2x_i^2 + \dots + a_mx_i^m + y_i)^2 \rightarrow \min$$

де

$x_i$  і  $y_i$  – координати вузлових точок таблиці,

$a_j, j = \overline{0, m}$  – невідомі коефіцієнти многочлена.

Необхідною умовою існування мінімуму функції  $S$  є рівність нулю її приватних похідних по кожній  $a_j$ .

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\delta S}{\delta a_0} \rightarrow 2 \sum_{i=0}^n ((a_0 x_i^0 + a_1 x_i^1 + \dots + a_m x_i^m - y_i) x_i^0) = 0 \\ \frac{\delta S}{\delta a_1} \rightarrow 2 \sum_{i=0}^n ((a_0 x_i^0 + a_1 x_i^1 + \dots + a_m x_i^m - y_i) x_i^1) = 0 \\ \frac{\delta S}{\delta a_2} \rightarrow 2 \sum_{i=0}^n ((a_0 x_i^0 + a_1 x_i^1 + \dots + a_m x_i^m - y_i) x_i^2) = 0 \\ \dots \dots \dots \\ \frac{\delta S}{\delta a_m} \rightarrow 2 \sum_{i=0}^n ((a_0 x_i^0 + a_1 x_i^1 + \dots + a_m x_i^m - y_i) x_i^m) = 0 \end{array} \right.$$

В результаті отримали систему лінійних рівнянь. Розкриваючи дужки і переносячи вільні члени в правій частині рівнянь, отримаємо в нормальній формі систему лінійних рівнянь:

$$\left\{ \begin{array}{l} c_0 a_0 + c_1 a_1 + c_2 a_2 + \dots + c_m a_m = d_0 \\ c_1 a_0 + c_2 a_1 + c_3 a_2 + \dots + c_{m+1} a_m = d_1 \\ c_2 a_0 + c_3 a_1 + c_4 a_2 + \dots + c_{m+2} a_m = d_2 \\ \dots \dots \dots \\ c_m a_0 + c_{m+1} a_1 + c_{m+2} a_2 + \dots + c_{2m} a_m = d_m \end{array} \right. \quad (9.8)$$

де

$a_j$  – невідомі системи лінійних рівнянь (9.7),

$c_k = \sum_{i=0}^n x_i^k, k = \overline{0, 2m}$  – коефіцієнти системи лінійних рівнянь (9.7),

$d_j = \sum_{i=0}^n y_i x_i^j, j = \overline{0, m}$  – вільні члени системи лінійних рівнянь (9.7),

Порядок системи становить  $m+1$ .

При ручному рахунку коефіцієнти  $c_k$  і вільні члени  $d_j$  зручно визначати, користуючись (табл. 9.1).

Таблиця 9.1 – Для ручного рахунку коефіцієнтів  $c_k$  і вільних членів  $d_j$

$i$	$x_i^0$	$x_i^1$	$x_i^2$	...	$x_i^{2m}$	$x_i^0 y_i$	$x_i^1 y_i$	...	$x_i^m$
0	1								
1	1								
2	1								
...	...								
N	1								
$\sum_{i=0}^n$	$c_0$	$c_1$	$c_2$	...	$c_{2m}$	$d_0$	$d_1$	...	$d_m$

### Контрольні питання:

1. У чому полягає завдання апроксимації дослідних даних? Опишіть два способи апроксимації дослідних даних, їх переваги і недоліки.
2. Навіщо застосовують згладжування дослідних даних? Метод найменших квадратів при згладжуванні даних.
3. Яка апроксимація називається лінійною регресією?
4. Яка апроксимація називається квадратичною регресією?
5. Яка апроксимація називається кубічною регресією?
6. Приведіть алгоритм побудови функції апроксимації методом найменших квадратів в Excel

## 10. МЕТОДИ ЕКСТРАПОЛЮВАННЯ

Одним з найбільш поширених методів короткострокового прогнозування явищ є екстраполяція

Термін "екстраполяція" має декілька тлумачень. У широкому сенсі екстраполяція – це метод наукового дослідження, що полягає в розповсюдженні виводів, отриманих із спостережень за однією частиною явища, на а іншу його частина. У вузькому сенсі – це визначення по ряду даних функції інших її значень поза цим рядом за цим поряд.

Екстраполяція полягає у вивченні тих, що склалися у минулому і сьогоденні стійких тенденцій розвитку і перенесення їх на майбутнє. Мета такого прогнозу – показати, до яких результатів можна зробити в майбутньому, якщо рухатися до нього з тією ж швидкістю або прискоренням, що і у минулому.

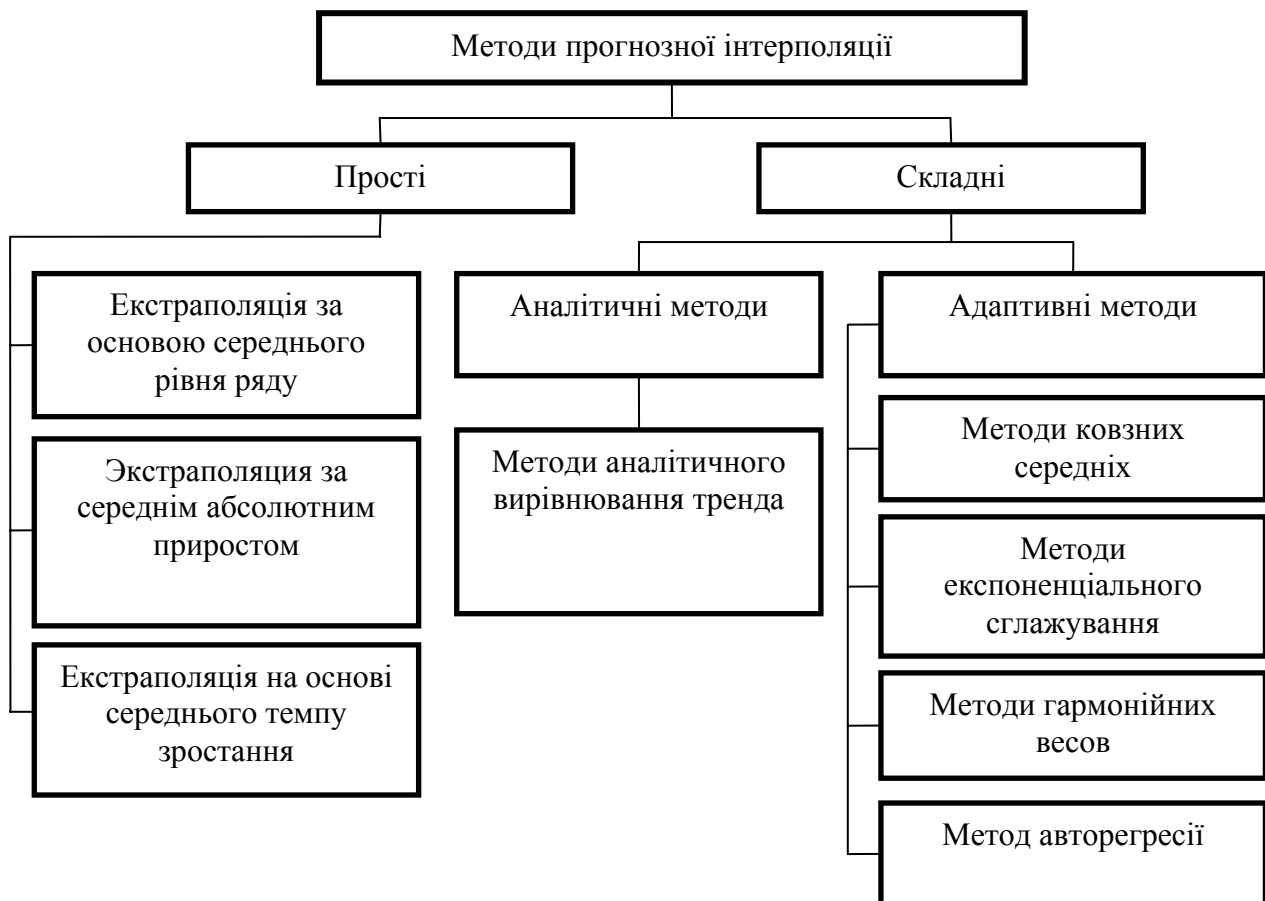


Рисунок 10.1 – Угрупування методів прогнозування екстраполяції

Прості методи екстраполяції ґрунтуються на припущенні відносної стійкості в майбутньому абсолютних значень рівнів, середнього рівня ряду, середнього абсолютного приросту, середнього темпу зростання

При екстраполяції на основі середнього рівня ряду використовується принцип, при якому прогнозований рівень рівний середньому значенню рівнів ряду у минулому, тобто

$$y^* = \bar{y}$$

У такому разі екстраполяція дає прогностичну точкову оцінку. Точний збіг цих оцінок з фактичними даними – явище маловірогідне. Отже, прогноз повинен бути у вигляді інтервалу значень. Довірчий інтервал прогнозу для середньої при невеликому числі спостережень знаходиться по формулі.

$$y^* = \bar{y} \pm t_a \cdot \sigma \sqrt{1 + \frac{1}{n}}$$

де  $t_a$  – табличне значення

У свою чергу середнє квадратичне відхилення для вибірки рівне:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (y_i - \bar{y})^2}{n-1}}$$

де  $Y_i$  – поточний рівень ряду динаміки;  $n$  – число рівнів ряду динаміки

Екстраполяція по середньому абсолютному приросту може бути здійснена тільки тоді, якщо рахувати загальну тенденцію розвитку явища лінійної.

Для обчислення прогнозного значення рівня необхідно визначити середній абсолютний приріст, а потім, знаючи рівень ряду динаміки, прийнятий за базу екстраполяції  $y_n$ , записати екстраполяційну формулу:

$$y^* = y_n + \bar{\Delta} \cdot l$$

Екстраполяція по середньому темпу зростання може бути здійснена, якщо є підстави вважати, що загальна тенденція ряду динаміки характеризується показовою кривою. Прогнозований рівень ряду в цьому випадку визначається по формулі:

$$y^* = y_n \cdot \overline{TP}^t$$

де  $\overline{TP}$  – середній темп зростання, розрахований по формулі середньої геометричної.

Усі три розглянуті методи екстраполяції тренда є простими, але одночасно і найбільш наближені.

Складні методи екстраполяції передбачають виявлення основної тенденції, тобто застосування статистичних формул, що описують тренд. Методи цієї групи можна розділити на два основні типи: аналітичні (криві зростання) і адаптивні.

У основу аналітичних методів прогнозування (кривих зростання) покладений принцип отримання за допомогою методу найменших квадратів оцінки детермінованої компоненти, що характеризує основну тенденцію

Адаптивні методи прогнозування засновані на тому, що процес реалізації їх полягає в обчисленні послідовних в часі значень прогнозованого показника з урахуванням ступеня впливу попередніх рівнів. До них відносяться методи текучою і експоненціальною середніх, метод гармонійних вагів, метод авторегресії.

Метод аналітичного вирівнювання тренда (метод найменших квадратів) може бути застосований тільки у тому випадку, коли розвиток явища достатній добре описується побудованій моделі і умови, що визначають тенденцію розвитку у минулому, істотно не зміняться в майбутньому.

Процедура розробки прогнозу по використанню аналітичного вирівнювання тренда складається з наступних етапів:

- 1) вибір форми кривою, відображає тенденцію;
- 2) визначення показників, кількісно характеризує тенденції змін;
- 3) оцінка вірогідності прогнозних розрахунків

Вибір форми кривою можна здійснювати на основі побудови графіка, загальний вид якого, як правило, дозволяє встановити:

- а) чіткість вираженої тенденції динамічного ряду показника;
- б) плавність тенденції;
- в) характер тенденції.

Необхідно пам'ятати, що зовнішня простота графіка помилкова. У зв'язку з цим, для підвищення обґрунтованості і достовірності вирівнювання, з метою точнішого виявлення наявної тенденції необхідно провести варіантний розрахунок по декількох аналітичними функціями і на основі експертних і статистичних оцінок визначити кращу форму зв'язків.

Потім, необхідно визначити параметри рівняння зв'язку (використовують метод найменших квадратів). В цьому випадку вирівнююча функція займатиме таке положення серед фактичних значень показників, при якому сумарне відхилення крапок від функції буде мінімальним.

## **10.1 Метод експоненціального згладжування**

Експоненціальне згладжування - це вирівнювання динамічних рядів, які дуже коливаються, з метою подальшого прогнозування. Суть методу полягає в згладжуванні тимчасового ряду за допомогою зваженої ковзною середньою, в

якій ваги підпорядковані експоненціальному закону. Розрахунок здійснюється по формулі:

$$S_t = \alpha \cdot y_t + (1 - \alpha) \cdot S_{t-1}$$

де  $S_t$  – значення експоненціальною середньою у момент  $t$ ;

$y_t$  – поточне значення ряду динаміки;

$S_{t-1}$  – значення експоненціальною середньою у момент  $t-1$

$\alpha$  – коефіцієнт згладжування. Значення  $\alpha$  завжди знаходиться в межах від  $0$  до  $1$ , і у кожному конкретному випадку необхідно вибрати найбільш прийнятне значення

У тих випадках, коли тенденція після згладжування початкового ряду визначена недостатньо чітко, процедуру згладжування повторюють, тобто обчислюють експоненціальні середні 2-го, 3-го і подальших порядків.

При практичному використанні методу експоненціального згладжування виникають деякі труднощі: вибір константи  $\alpha$  і визначення початкової умови  $y_0$ .

Цей метод прогнозування використовується тоді, коли є упевненість, що тенденція в майбутньому описується плавній кривій, є ряд динаміки, немає сезонних і циклічних коливань

## 10.2 Класифікація методів прогнозування. Оцінка точності прогнозу, побудованого методом екстраполяції

Метод прогнозування - це спосіб дослідження об'єкту прогнозування, направлений на розробку прогнозу. В даний час існує близько 150 методів прогнозування, але практично використовуються близько 20-30 основних методів.

Методика прогнозування - це сукупність спеціальних прийомів і правил розробки конкретних прогнозів. **Прийом прогнозування** – це математична або логічна операція, направлена на отримання конкретних результатів в процесі розробки прогнозів.

Класифікація методів прогнозування здійснюється по трьом основним ознакам:

- по ступеню формалізації методів;
- за загальним принципом дії;
- за способом отримання прогнозової інформації.

**По ступеню формалізації методи прогнозування діляться** на формалізованих і інтуїтивних.



**Формалізовані методи** використовуються у тому випадку, коли інформація про об'єкт прогнозування носить в основному кількісний характер, а вплив різних чинників можна описати за допомогою математичних формул.

**Інтуїтивні методи** застосовуються тоді, коли інформація кількісного характеру про об'єкт прогнозування відсутня або носить в основному якісний характер і вплив чинників неможливо описати математично.

У свою чергу ці дві групи можна розділити за загальним принципом діяльності і способом отримання прогностичної інформації. **Формалізовані методи підрозділяються** на методи екстраполяції і методи моделювання.

**Екстраполяція** – це метод наукового дослідження, який заснований на розповсюдженні минулих і справжніх тенденцій, закономірностей, зв'язків на майбутній розвиток об'єкту прогнозування.

**До методів екстраполяції відносяться** метод ковзної середньої, метод експоненціального згладжування, метод найменших квадратів.

Методи екстраполяції досить широко застосовуються на практиці, оскільки вони прості, дешеві, і не вимагають для розрахунків великої статистичної бази. **Використання методів екстраполяції припускає два допущення**, які в більшості випадків характерні для економічних процесів:

основні чинники, тенденції минулого збережуть свій прояв в майбутньому;

досліджуване явище розвивається по плавній траєкторії, яку можна виразити, описати математично.

**До методів моделювання відносяться:** методи інформаційного моделювання (патентний і публікація), статистичного моделювання, логічного моделювання (прогностичній аналогії, «дерево цілей»).

**Методи інформаційного моделювання** (або випереджаючого прогнозування) були розроблені і вперше використані для побудови прогнозів, пов'язаних з **науково-технічним прогресом** (НТП). Вони засновані на властивості науково-технічної інформації передувати впровадженню досягнень НТП в практичну діяльність.

**Методи прогнозування аналогічно** прийнятні у тому випадку, коли поява однієї події супроводжується появою іншого і цей взаємозв'язок носить стійкий характер – характер закономірності. До таких методів відносяться методи математичної аналогії і історичної аналогії.

**Метод «дерево цілей»** використовується для прогнозування складних економічних процесів, систем, в яких можливе виділення багатьох структурних або ієрархічних рівнів. Процедура побудови «дерева цілей» є формулюванням

генеральної мети прогнозу з подальшим розбиттям її на ряд поміжних цілей 1-го рівня, який є результатом реалізації поміжних цілей 2-го рівня, і так далі. При цьому розбиття генеральної мети походить як би з майбутнього в сьогодення зі встановленням проміжних подій і фіксацією причинно-наслідкових зв'язків між ними. «Дерево цілей» формується за допомогою експертів, причому при переході від рівня до рівня склад експертів міняється.

**Інтуїтивні методи прогнозування** застосовуються для тих процесів, які неможливо описати математичними формулами. Використання даних методів дає можливість отримати прогнозну оцінку стану розвитку об'єкту в майбутньому незалежно від інформаційної забезпеченості. Суть інтуїтивних методів полягає в побудові раціональної процедури інтуїтивно-логічного мислення людини у поєднанні з кількісними методами оцінки і обробки отриманих результатів. Вирішення проблеми в цьому випадку базується на узагальненій думці експертів.

**Інтуїтивні методи прогнозування діляться** на індивідуальні і колективні експертні оцінки. **Індивідуальні експертні оцінки** засновані на узагальненні думок окремих експертів, виражених незалежно один від одного. До них відносяться: метод інтерв'ю, метод анкетного опиту, аналітичний метод, метод написання сценарію. Колективні експертні оцінки базуються на отриманні об'єднаної оцінки від всієї групи фахівців-експертів, виробленої при безпосередньому контакті. До таких методів відносяться метод Дельфі, метод «мозкової атаки», метод експертних комісій.

### Оцінка точності прогнозу, побудованого методом екстраполяції

Всякий прогноз повинен мати високу точність, яка є найважливішою його характеристикою. Існує декілька способів оцінки точності прогнозу:

#### Середня абсолютна оцінка

$$\Delta \bar{t} = \frac{\sum_{i=1}^n (y_{\phi} - y_p)}{n}$$

де  $y_{\phi}$  – фактичне значення досліджуваного явища,  $y_p$  – розрахункове значення досліджуваного явища,  $n$  – число рівнів тимчасового ряду;

## Середня квадратична оцінка

$$\delta = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (y_{\phi} - y_p)^2}{n}}$$

Чим ближче до нуля перший і другий показники, тим вище точність прогнозу.

## Середня відносна помилка

$$\varepsilon = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n \left[ \frac{|y_{\phi} - y_p|}{y_{\phi}} \cdot 100 \right]$$

Інтерпретація значень *середньої відносної помилки* для оцінки точності прогнозу представлена в наступній таблиці:

Таблиця 10.1 – Інтерпретація значень середньої відносної помилки

Середня відносна помилка ( $\varepsilon$ ) %	Інтерпретація
< 10	Точність прогнозу висока
10-20	Точність хороша
20-50	Точність задовільна
> 50	Точність незадовільна

## 10.3 Ковзна середня

*Ковзна середня, ковзне середнє* (англ. **moving average**, англ. **MA**) — загальна назва для сімейства функцій, значення яких в кожній точці визначення рівні середньому значенню початкової функції за попередній період. Ковзні середні зазвичай використовуються з даними тимчасових рядів для згладжування короткострокових коливань і виділення основних тенденцій або циклів. Математично ковзне середнє є одним з видів згортки, і тому його можна розглядати як фільтр низьких частот, використовуваних в обробці сигналів.

У загальному випадку, зважені ковзні середні обчислюються за формулою:

$$WWMA_t = \sum_{i=0}^{n-1} w_{t-i} \cdot p_{t-i}$$

де  $WWMA_t$  — значення зваженого ковзного середнього в крапці  $t$ ;  $n$  — кількість значень початкової функції для розрахунку ковзного середнього;  $w_{t-i}$  — нормована вага (ваговий коефіцієнт)  $t - i$ -го значення початкової функції;

$P_{t-i}$  — значення початкової функції у момент часу, віддалений від поточного на  $i$  інтервалів.

## Просте ковзне середнє

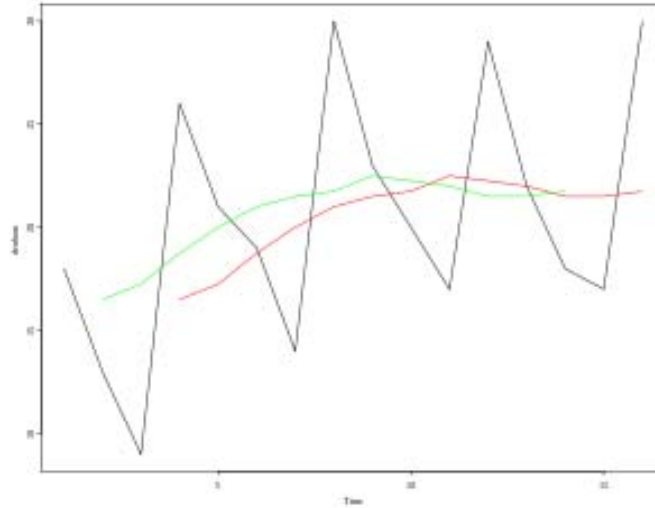


Рисунок 10.2 – Початкова функція і її прості ковзні середні по чотирьох значеннях ( $n = 4$ ).

Зелена лінія — центрування по середині інтервалу (дійсне положення).

Червона лінія — зрушення графіка управо до останнього значення вікна.

**Просте ковзне середнє**, або **арифметичне ковзне середнє** (англ. *simple moving average*, англ. *SMA*) чисельно рівне середньому арифметичному значень початкової функції за встановлений період і обчислюється за формулою:

$$SMA_t = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} p_{t-i} = \frac{p_t + p_{t-1} + \dots + p_{t-i} + \dots + p_{t-n+2} + p_{t-n+1}}{n}$$

де  $SMA_t$  — значення простого ковзного середнього в крапці  $t$ ;  $n$  — кількість значень початкової функції для розрахунку ковзного середнього, ніж ширше згладжуючий інтервал, тим більше плавним виходить графік функції;  $P_{t-i}$  — значення початкової функції в крапці  $t - i$ .

Виділяють наступні недоліки простого ковзного середнього:

- Рівність вагового коефіцієнта 1.
- Подвійна реакція на кожне значення: у момент входу у вікно обчислень і у момент виходу з нього.

## Зважене ковзне середнє

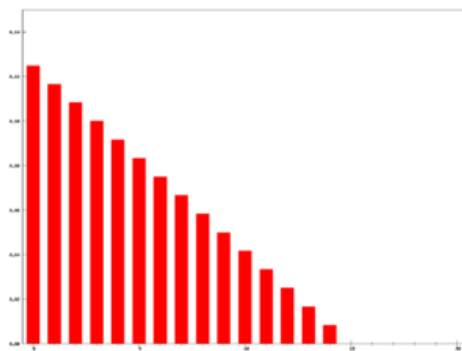


Рисунок 10.3 – Ваги значень початкової функції при обчисленні WMA із  $n = 15$

*Зважене ковзне середнє* (англ. *weighted moving average* — англ. *WMA*), точніше *лінійно зважене ковзне середнє* — ковзне середнє, при обчисленні якого вага кожного члена початкової функції, починаючи з меншого, рівна відповідному членові арифметичної прогресії. Тобто, при обчисленні WMA для тимчасового ряду, ми рахуємо останні значення початкової функції більш значущі чим попередні, причому функція значущості лінійно убиває.

## Експоненціальне зважене ковзне середнє

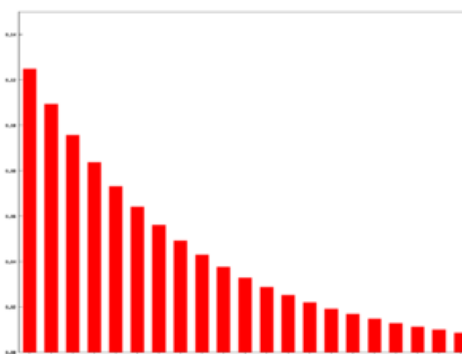


Рисунок 10.4 – Ваги значень початкової функції при обчисленні EMA із  $n = 15$

*Експоненціальне зважене ковзне середнє, експоненціальне ковзне середнє* (англ. *exponentially weighted moving average* — англ. *EWMA*, англ. *exponential moving average* — англ. *EMA*) — різновид зваженої ковзною середньою, ваги якої убивають експоненціально і ніколи не рівні нулю:

## Експоненціальне ковзне середнє довільного порядку

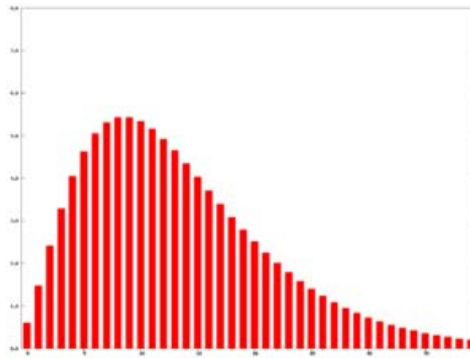


Рисунок 10.5 – Ваги експоненціально зваженою ковзною середньою третього порядку — ТМА з вікном  $n=10$ .

У звичайному експоненціальному ковзному середньому згладжуванню піддається значення початкової функції, проте, згладжуванню можуть піддаватися і значення результуючої функції. Тому деякі автори визначають поняття *експоненціальні ковзне середнє довільного порядку*.

### Модифіковане ковзне середнє

*Модифіковане ковзне середнє* (від англ. *modified moving average* — англ. *MMA*; іноді зване англ. *running moving average* — англ. *RMA* і англ. *smoothed moving average*). Модифіковане ковзне середнє є окремим випадком експоненціального ковзного середнього.

## 10.4 Вивчення сезонних коливань

При аналізі даних багатьох явищ за певний інтервал часу виявляються коливання, що повторюються, які не змінюються тривалий період часу. У статистиці такі коливання називаються сезонними. Періодичні коливання, які мають певний і постійний період, наприклад, рівний річному проміжку, носять назву «*Сезонні коливання*» або «*сезонні хвилі*», а динамічний ряд в цьому випадку називають *сезонним поряд динаміки*.

При статистичному вивченні в рядах внутрішньорічної динаміки сезонних коливань, вирішуються наступні два взаємозв'язані завдання:

виявлення специфіки розвитку явища, що вивчається, у внутрішньорічній динаміці;

вимірювання сезонних коливань явища, що вивчається, з побудовою моделі сезонної хвилі.

У статистиці існує ряд методів вивчення і вимірювання сезонних коливань. Найпростіший полягає в побудові спеціальних показників, які називаються індексами сезонності  $i_s$ . Сукупність цих показників відображає сезонну хвилю. У загальному вигляді вони визначаються відношенням початкових (емпіричних) рівнів ряду динаміки ( $y_i$ ) до теоретичних (розрахункових) рівнів ( $y_t$ ), виступаючих як база порівняння:

$$i_{S_i} = \frac{y_i}{y_t}$$

Саме в результаті того, що в цій формулі вимірювання сезонних коливань проводиться на базі відповідних теоретичних рівнів тренда ( $y_t$ ), в обчислюваних при цьому індивідуальних індексах сезонності, вплив основної тенденції розвитку елімінується (усувається).

Для того, щоб виявити стійку сезонну хвилю, на якій не відбивалися б випадкові умови одного року, індекси сезонності обчислюють по даним за декілька років (не менше три), розподіленим по місяцях.

Оскільки на сезонні коливання можуть накладатися випадкові відхилення, для їх усунення проводиться усереднювання індивідуальних індексів однойменних внутрішньорічних періодів аналізованого ряду динаміки. Тому для кожного періоду річного циклу визначаються узагальнені показники у вигляді середніх індексів сезонності:

$$\bar{i}_{S_i} = \frac{\sum i_{S_i}}{n}$$

Обчислені на основі цієї формули *середні індекси сезонності* (із застосуванням, як база порівняння, відповідні рівні тренда) вільні від впливу основної тенденції розвитку і випадкових відхилень.

Залежно від характеру тренда, формула приймає наступні форми:

1) Для рядів внутрішньорічної динаміки з яскраво вираженою *основною тенденцією розвитку* (т.з. *нестационарні* ряди динаміки). Виступаючі при цьому, як змінна база порівняння, теоретичні рівні ( $y_t$ ) представляють, свого роду, «середню вісь кривої», оскільки їх розрахунок заснований на положеннях методу найменших квадратів. Тому вимірювання сезонних коливань на базі змінних рівнів тренда називається *способом змінної середньої*.

$$\bar{i}_{S_i} = \frac{\sum \frac{y_i}{y_{t_i}}}{n}$$

2) Для рядів внутрішньорічної динаміки, в яких **тренд, що** підвищується (що знижується), **відсутній** або він незначний (т.з. стаціонарні ряди динаміки). У даній формулі базою порівняння є загальний для аналізованого ряду динаміки середній рівень. Оскільки для всіх емпіричних рівнів аналізованого ряду динаміки цей загальний середній рівень є постійним величиною, те застосування формули називається **способом постійної середньої**. **Коефіцієнт сезонності** або індекс сезонності в даному випадку є відношенням середній з **фактичних рівнів** однойменних місяців до середньої з **вирівняних** (теоретичних, розрахункових) даних по тих же місяцях, виступаючих як база порівняння:

$$\bar{i}_{S_i} = \frac{\bar{y}_i}{y}$$

Для визначення теоретичних рівнів тренда важливо правильно підібрати **математичну функцію**, по якій проводитиметься **аналітичне вирівнювання** в аналізованому ряду динаміки. Це найбільш складний і відповідальний етап вивчення сезонних коливань. Від обґрунтованості підбору тієї або іншої математичної функції, багато в чому залежить практична значущість отримуваних в аналізі індексів сезонності.

**При використанні способу аналітичного вирівнювання хід обчислень індексів сезонності наступний:**

по відповідному поліному обчислюються для кожного місяця (кварталу) рівні, що вирівнюються, на момент часу ;

визначаються відносини фактичних місячних (квартальних) даних до відповідних даних, що вирівнюються (у відсотках, долях);

знаходяться середні арифметичні з процентних (пайових) співвідношень, розрахованих по однойменних періодах.

Розрахунок закінчується перевіркою правильності обчислень індексів і їх **коректуванням**.



Таблиця 10.2 – Класифікація методів вимірювання сезонних хвиль

Методи вимірювання сезонних хвиль, засновані на застосуванні	Найменування методів обчислення сезонних хвиль
I. Середньою арифметичною	1. Метод абсолютних різниць 2. Метод відносин середніх місячних до середньої за весь період 3. Метод відносин місячних рівнів до середньої даного року
II. Відносних величин	1. Метод відносних величин 2. Метод відносних величин на основі медіани 3. Ланцюговий метод
III. Механічного вирівнювання	1. Метод ковзних середніх 2. Метод ковзних сум і ковзних середніх
IV. Аналітичного вирівнювання	1. Вирівнювання по прямій 2. Вирівнювання по параболі і експоненті 3. Вирівнювання по ряду Фур'є

Отже, порядок розрахунку і величина індексу сезонності залежать від способу вирівнювання:

Якщо це 12 місячна ковзна середня, то це спосіб **простій ковзною середньою**.

Якщо отриманий аналітичним вирівнюванням — спосіб **аналітичного вирівнювання**.

Щоб виділити сезонні коливання для рядів динаміки з яскраво вираженою тенденцією розвитку (нестационарні ряди динаміки), необхідно провести **декомпозицію тимчасового ряду** з подальшим сезонним коректуванням.

## **Контрольні питання:**

1. Поняття екстраполювання (прогноз)
2. Приведіть угруповання методів прогнозної екстраполяції
3. Опишіть прості методи прогнозної екстраполяції
4. Які методи включають в складні методи прогнозної екстраполяції?
5. Класифікація методів прогнозування
6. Оцінка точності прогнозу, побудованого методом екстраполяції
7. Побудова прогнозу методом ковзної середньої
8. Види ковзних середніх
9. Опишіть просте ковзне середнє
10. Зважене ковзне середнє

## 11. РЕГРЕСІЯ. РІШЕННЯ В ПАКЕТІ MATHCAD

Апроксимація даних з урахуванням їх статистичних параметрів відноситься до завдань *регресії*. Вони зазвичай виникають при обробці експериментальних даних, отриманих в результаті вимірювань процесів або фізичних явищ, статистичних за своєю природою (як, наприклад, вимірювання в радіометрії і ядерній геофізиці), або на високому рівні перешкод (шумів). Завданням регресійного аналізу є підбір математичних формул, що найкращим чином описують експериментальні дані.

Термін "регресія" з'явився при дослідженні співвідношення зростання батьків і їх дітей, в яких було встановлено, що зростання "регресує" до середнього, тобто високі батьки мають нижчих дітей, а низькі батьки – вищих.

Як основна математична система для прикладів використовуватимемо систему Mathcad.

### 11.1 Постановка завдання регресії

Математична постановка завдання регресії полягає в наступному. Залежність величини (числового значення) певної властивості випадкового процесу або фізичного явища  $Y$  від іншої змінної властивості або параметра  $X$ , яке в загальному випадку також може відноситися до випадкової величини, зареєстрована на безлічі точок  $x_k$  безліччю значень  $y_k$ , при цьому в кожній крапці зареєстровані значення  $y_k$  і  $x_k$  відображають дійсні значення  $Y(x_k)$  з випадковою погрішністю  $\sigma_k$ , розподіленою, як правило, по нормальному закону. По сукупності значень  $y_k$  потрібно підібрати таку функцію  $f(x_k, a_0, a_1, \dots, a_k)$ , якою залежність  $Y(x)$  відображалася б з мінімальною погрішністю. Звідси слідує умова наближення:

$$y_k = f(x_k, a_0, a_1, \dots, a_k) + \sigma_k$$

Функцію  $f(x_k, a_0, a_1, \dots, a_k)$  називають регресією величини  $y$  на величину  $x$ . Регресійний аналіз передбачає завдання вигляду функції  $f(x_k, a_0, a_1, \dots, a_k)$  і визначення чисельних значень її параметрів  $a_0, a_1, \dots, a_k$ , що забезпечують найменшу погрішність наближення до безлічі значень  $y_k$ . Як правило, при регресійному аналізі погрішність наближення обчислюється *методом найменших квадратів* (МНК). Для цього виконується мінімізація функції квадратів залишкових помилок:

$$\Phi(a_0, a_1, \dots, a_k) = \sum (f(x, a_0, a_1, \dots, a_k) - y_k)^2$$

Для визначення параметрів  $a_0, a_1, \dots, a_k$  функція залишкових помилок диференціюється по всіх параметрах, отримані рівняння приватних похідних прирівнюються нулю і вирішуються в сукупності щодо всіх значень параметрів. Види регресії зазвичай називаються за типом апроксимуючих функцій: поліноміальна, експоненціальна, логарифмічна і тому подібне

**Методи регресійного аналізу** дозволяють: проводити розрахунок різного виду регресійних моделей; перевіряти *гіпотезу адекватності моделі* наявним спостереженням; використовувати *модель для прогнозування значень* залежною змінною при нових значеннях незалежної змінної. У Mathcad існує набір функцій, що дозволяють розрахувати різні регресійні моделі. У таблиці представлені функції, використовувані при створенні регресійних моделей.

Найменування моделі	Вид рівняння регресії	Функції Mathcad
Лінійна	$y(x) = a * x + b$	<b>Line(vx, vy)</b>
Поліноміальна n-ступеня	$y(x) = \sum_{i=0}^n a_i * x^i$	<b>P1:=regress(vx, vy, n)</b> <b>Interp(p1, vx, vy, x)</b>
Фрагменти поліномів 2-го ступеня	$y_i(x) = \sum (a_i * x^2 + b_i * x + c_i)$	<b>P2:=loess(vx, vy, span)</b> <b>Interp(p2, vx, vy, x)</b>
Експоненціальна	$y(x) = a * e^{b*x} + c$	<b>Expfit(vx, vy, g)</b>
Логістична функція	$y(x) = \frac{a}{1 + b * e^{-c*x}}$	<b>Lgsfit(vx, vy, g)</b>
Синусоїдальна	$y(x) = a * \sin(x + b) + c$	<b>Sinfit(vx, vy, g)</b>
Статечна	$y(x) = a * x^b + c$	<b>Pwfit(vx, vy, g)</b>
Логарифмічна	$y(x) = a * \ln(x + b) + c$	<b>Logfit(vx, vy, g)</b>
Логарифмічна коротка	$y(x) = a * \ln(x) + b$	<b>Lnfit(vx, vy, g)</b>

У кожній функції в Mathcad використовуються два вектори початкових даних, **vx** – вектор незалежних змінних, **vy** – вектор залежних змінних. Кількість елементів вектора **vx** і **vy** повинна бути однакою. Функції **regress** і **loess** використовуються тільки спільно з функцією **interp**. Самі функції **regress** і **loess** обчислюють тільки вектор, потрібний функцією **interp** для визначення самого полінома. У Mathcad параметр **span** функції **loess** визначає величину області, на якій будується конкретний фрагмент полінома 2-го ступеня. Оптимальне значення **span**, запропоноване довідковою системою Mathcad, рівне 0.75, але у кожному конкретному випадку рекомендується шляхом варіантних розрахунків підібрати якнайкраще значення **span**. Параметр **g** є вектором

початкових наближень для *невдомих функції регресії*. Після визначення регресійних залежностей в Mathcad, актуальним є вибір з їх сукупності якнайкращої функції, з погляду *адекватності* опису початкових експериментальних даних. Як критерій, що дозволяє вибрати якнайкращу регресійну модель, пропонується використовувати *коефіцієнт детермінації*, чисельно рівний *коефіцієнту кореляції в квадраті*. Значення коефіцієнта кореляції в Mathcad дозволяє розрахувати функція **corr(A,B)**, де **A** і **B** – два вектори значень. На лістингу, представлений приклад розрахунку різних регресійних моделей і вибору якнайкращою з них. Як видно з даних, приведених на лістингу якнайкращі результати дає поліноміальна модель на основі функції **loess**. Дана модель характеризується значенням *коефіцієнта детермінації* рівним 0.984.

## 11.2 Лінійна регресія

*Загальний принцип.* Простий спосіб апроксимації по МНК довільних даних  $s_k$  – за допомогою полінома першого ступеня, тобто функції вигляду  $y(t) = a+bt$ , яку зазвичай називають лінією регресії. З урахуванням дискретності даних по точках  $t_k$ , для функції залишкових помилок маємо:

$$\sigma(a,b) = \sum_k [(a + b \cdot t_k) - s_k]^2$$

Для обчислення оцінок коефіцієнтів диференціюємо функцію залишкових помилок по аргументах **a** і **b**, прирівнюємо отримані рівняння нулю і формуємо два нормальні рівняння системи:

$$\sum_k 2((a + b \cdot t_k) - s_k) \equiv a \sum_k 1 + b \sum_k t_k - \sum_k s_k = 0$$

$$\sum_k 2((a + b \cdot t_k) - s_k) \cdot t_k \equiv a \sum_k t_k + b \sum_k t_k^2 - \sum_k s_k t_k = 0$$

Вирішення даної системи рівнянь в явній формі для  $K$ -звітів:

$$b = \frac{K \sum_k t_k s_k - \sum_k t_k \sum_k s_k}{K \sum_k t_k^2 - (\sum_k t_k)^2} = \frac{(\overline{s_k t_k} - \bar{s}_t \cdot \bar{t}_k)}{\bar{t}^2 - \bar{t}_k^2}$$

$$a = \frac{\sum_k s_k - b \sum_k t_k}{K} = \bar{s}_k - b \cdot \bar{t}_k$$

Набутих значень коефіцієнтів використовуємо в рівнянні регресії  $y(t) = a + b \cdot t$ . Пряма  $(s - \bar{s}_k) = b(t - \bar{t})$  називається лінією регресії **s** по **t**. Для

отримання лінії регресії  $t$  по  $s$ ,  $(t - \bar{t}) = b(s - \bar{s}_k)$ , аргумент  $b$  цієї формулі замінюється на значення  $b = \frac{\overline{s_k t_k} - \overline{s_k} \cdot \overline{t_k}}{\overline{s_k^2} - \overline{s_k}^2}$ .

За аналогічною методикою обчислюються коефіцієнти і будь-яких інших видів регресії, відрізняючись тільки громіздкістю відповідних виразів.

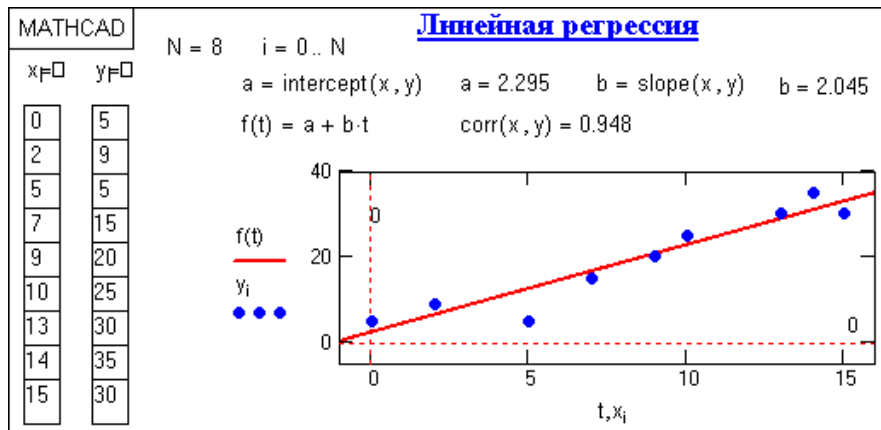


Рисунок 11.1 – Приклад виконання лінійної регресії

### 11.3 Поліноміальна регресія

**Однови́мерна поліно́міальна регресія** з довільним ступенем  $n$  полінома і з довільними координатами відліків в Mathcad виконується функціями:

**regress(X,Y,n)** – обчислює вектор **S** для функції **interp(...)**, у складі якого знаходяться коефіцієнти  $k_i$  полінома  $n$ -й ступеня;

**interp(S,X,Y,x)** – повертає значення функції апроксимації по координатах  $x$ .

Функція **interp(.)** реалізує обчислення за формулою:

$$f(x) = k_0 + k_1 x^1 + k_2 x^2 + \dots + k_n x^n \equiv \sum_i k_i x^i$$

Значення коефіцієнтів  $k_i$  можуть витягувати з вектора **S** функцією **submatrix(S, 3, length(S), 0, 0)**.

На рисунку 11.2 приведений приклад поліноміальної регресії з використанням поліномів 2, 3 і 8-у ступеню. Ступінь полінома зазвичай встановлюють не більше 4-6 з послідовним підвищенням ступеня, контролюючи середньоквадратичне відхилення функції апроксимації від фактичних даних. Неважко відмітити, що у міру підвищення ступеня полінома функція апроксимації наближається до фактичних даних, а при ступені

полінома, рівному кількості відліків мінус 1, взагалі перетворюється на функцію інтерполяції даних, що не відповідає завданням регресії.

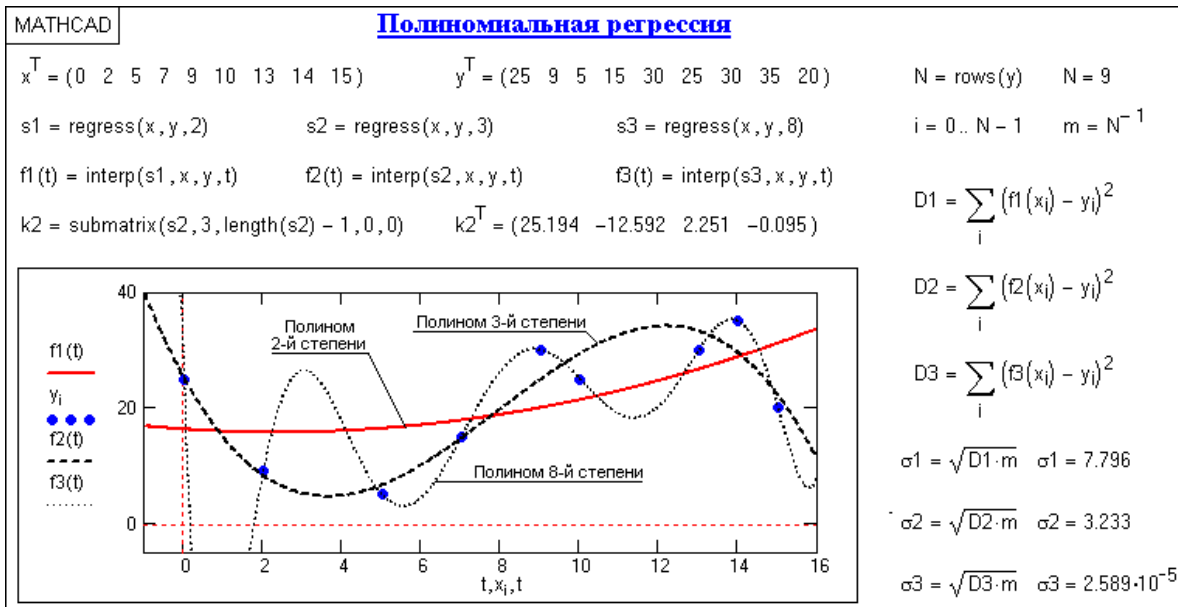


Рисунок 11.2 – Одновимірна поліноміальна регресія

**Зональна регресія.** Функція **regress** по всій сукупності крапок створює один апроксимуючий поліном. При великих координатних інтервалах з великою кількістю відліків і достатньо складній динаміці зміни даних рекомендується застосовувати послідовну локальну регресію відрізками поліномів малих ступенів. У Mathcad це виконується відрізками поліномів другого ступеня функцією.

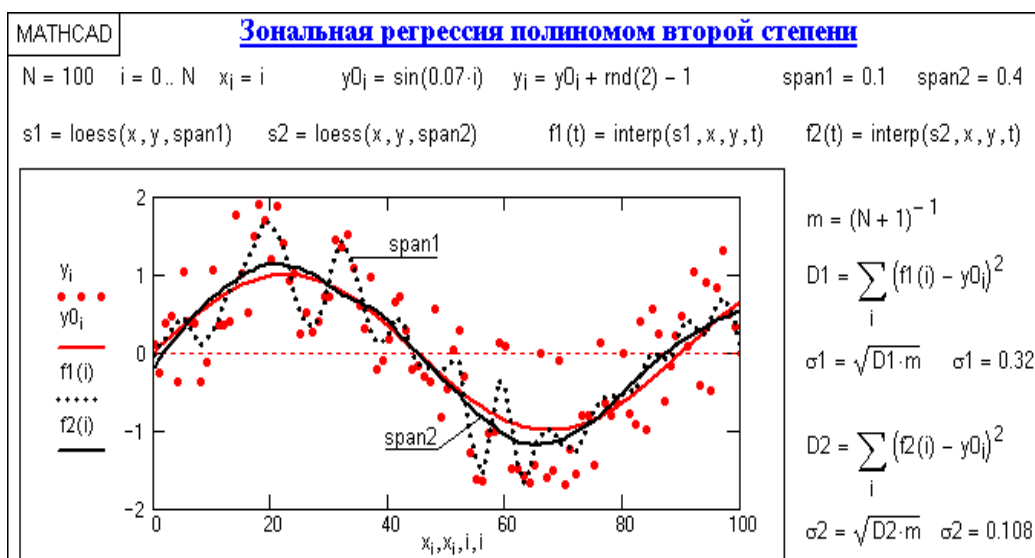


Рисунок 11.3. – Зональна регресія поліномом другого ступеня

**loess(X, Y, span)**, яка формує спеціальний вектор **S** для функції **interp(S,X,Y,x)**. Аргумент **span > 0** в цій функції (порядку 0.1-2) визначає розмір локальної області і підбирається з урахуванням характеру даних і необхідного ступеня їх згладжування (чим більше **span**, тим більше ступінь згладжування даних).

На рисунку 11.3 приведений приклад обчислення регресії модельною кривою (відрізання синусоїди) в сумі з шумами. Обчислення виконані для двох значень **span** з визначенням середньоквадратичного наближення до базової кривої. При моделюванні яких-небудь випадкових процесів і сигналів на високому рівні шумів по мінімуму середньоквадратичного наближення може визначатися оптимальне значення параметра **span**.

### 11.4 Нелінійна регресія

*Лінійне підсумовування довільних функцій.* У Mathcad є можливість виконання регресії з наближенням до функції загального вигляду у вигляді вагової суми функцій **f<sub>n</sub>(x)**:

$$f(x, K_n) = K_1 f_1(x) + K_2 f_2(x) + \dots + K_N f_N(x)$$

при цьому самі функції **f<sub>n</sub>(x)** можуть бути будь-якого, зокрема нелінійного типу. З одного боку, це різко підвищує можливості аналітичного відображення функцій регресії. Але, з іншого боку, це вимагає від користувача певних навиків апроксимації експериментальних даних комбінаціями достатньо простих функцій.

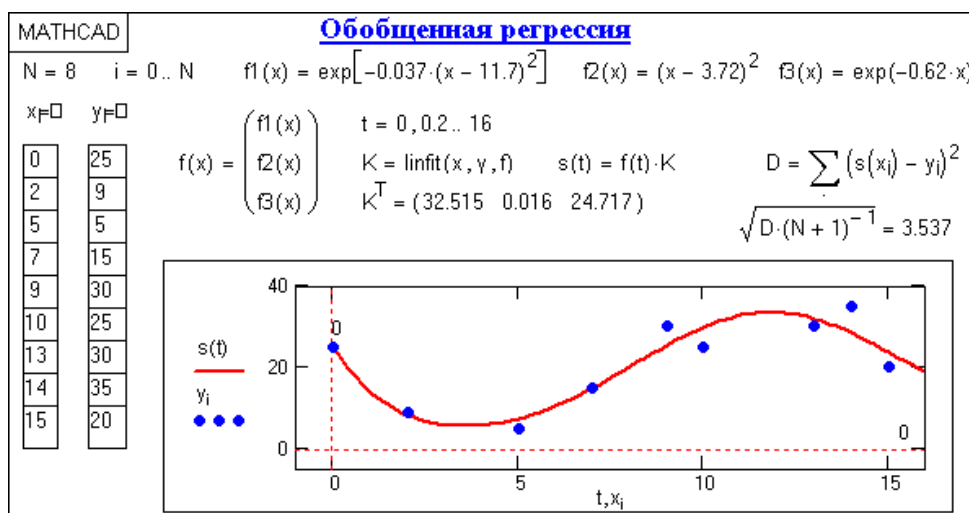


Рисунок 11.4 – Узагальнена регресія



Реалізується узагальнена регресія по векторах  $X$ ,  $Y$  і  $f$  функцією:

**linfit(X,Y,f)**, яка обчислює значення коефіцієнтів  $K_n$ . Вектор  $f$  повинен містити символічний запис функцій  $f_n(x)$ . Координати  $x_k$  у векторі  $X$  можуть бути будь-якими, але розташованими в порядку зростання значень  $x$  (з відповідними відліками значень  $y_k$  у векторі  $Y$ ). Приклад виконання регресії приведений на рисунку 11.4. Числові параметри функцій **f1-f3** підбиралися по мінімуму середньоквадратичного відхилення.

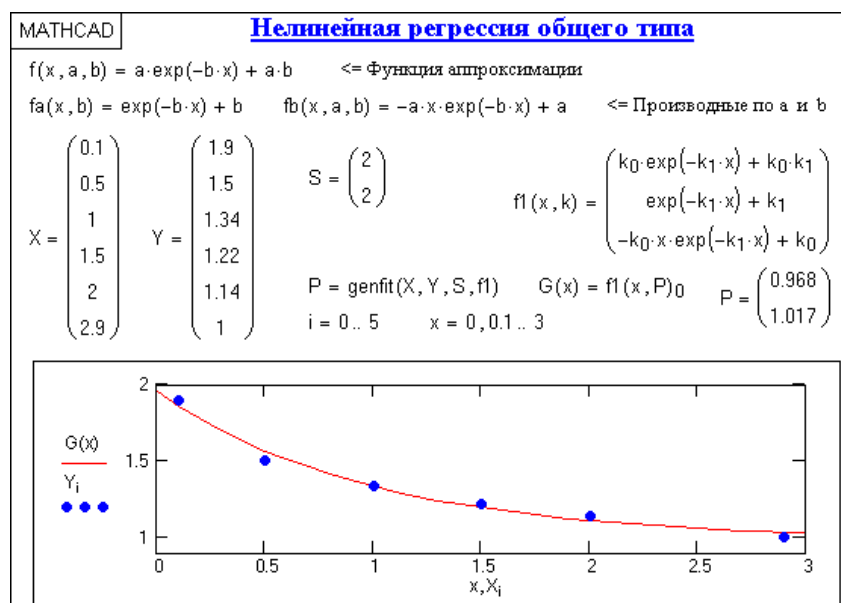


Рисунок 11.5. – Нелінійна регресія загального типу

**Регресія загального типу.** Другий вид нелінійної регресії реалізується шляхом підбору параметрів  $k_i$  до заданої функції апроксимації з використанням функції:

**genfit(X,Y,S,F)**, яка повертає коефіцієнти  $ki$ , що забезпечують мінімальну середню квадратичну погрішність наближення функції регресії до вхідних даних (вектори  $X$  і  $Y$  координат і відліків). Символьний вираз функції регресії і символічні вирази її похідних по параметрах  $k_i$  записуються у вектор  $F$ . Вектор  $S$  містить початкові значення коефіцієнтів  $k_i$  для вирішення системи нелінійних рівнянь ітераційним методом (рис. 11.5).

**Типові функції регресії Mathcad.** Для простих типових формул апроксимації передбачений ряд функцій регресії, в яких параметри функцій підбираються програмою Mathcad самостійно. До них відносяться наступні функції:

**expfit(X,Y,S)** – повертає вектор, що містить коефіцієнти **a**, **b** і **c** з експоненціальної функції  $y(x) = a \cdot \exp(b \cdot x) + c$ . У вектор **S** вводяться початкові значення коефіцієнтів **a**, **b** і **c** з першого наближення. Для орієнтування за формою функцій апроксимацій і завдання відповідних початкових значень коефіцієнтів на малюнках зліва приводиться вид функцій при постійних значеннях коефіцієнтів **a** і **c**.

**lgsfit(X,Y,S)** – те ж, для виразу  $y(x) = \frac{a}{1 + c \cdot \exp(b \cdot x)}$ .

**pwrfit(X,Y,S)** – те ж, для виразу  $y(x) = a \cdot x^b + c$ .

**sinfit(X,Y,S)** – те ж, для виразу  $y(x) = a \cdot \sin(x + b) + c$ . Підбирає коефіцієнти для синусоїдальної функції регресії. Малюнок синусоїди загальноновідомий.

**logfit(X,Y)** – те ж, для виразу  $y(x) = a \cdot \ln(x + b) + c$ . Завдання початкового наближення не вимагається.

**medfit(X,Y)** – те ж, для виразу  $y(x) = a + b \cdot x$ , тобто для функції лінійної регресії. Завдання початкового наближення також не вимагається. Графік – пряма лінія.

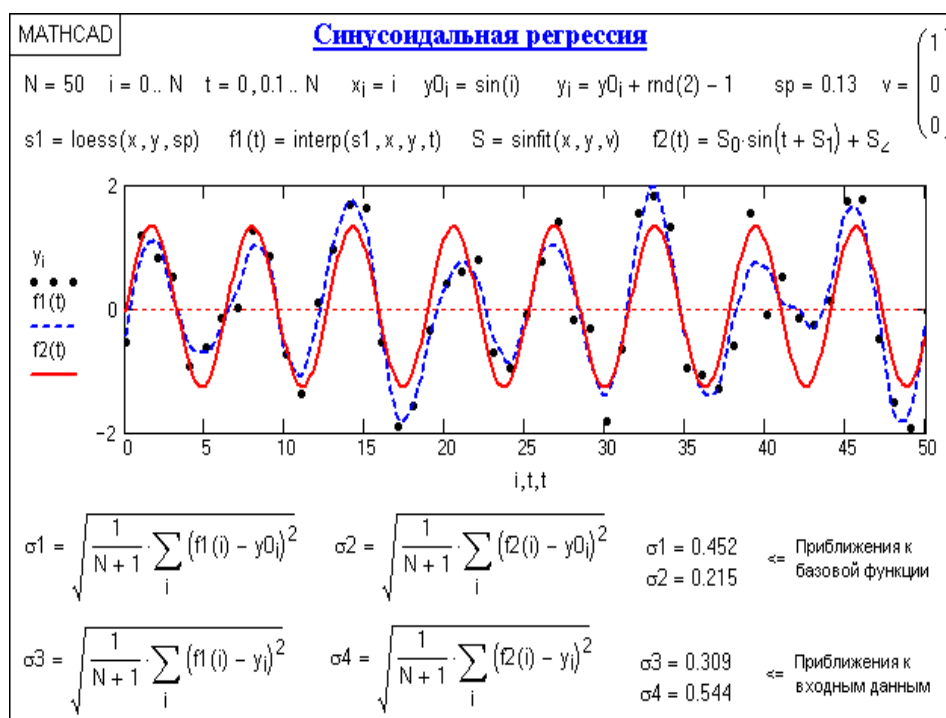


Рисунок 11.6. – Синусоїдальна регресія

На рисунку 11.6 приведений приклад реалізації синусоїдальної регресії модельного масиву даних по базовій синусоїді в зіставленні із зональною

регресією поліномом другого ступеня. Як можна бачити із зіставлення методів по середніх квадратичних наближеннях до базової кривої і до початкових даних, популярність функції математичного очікування для статистичних даних з її використанням як базова для функції регресія дає можливість з вищою точністю визначати параметри регресії в цілому по всій сукупності даних, хоча при цьому крива регресії не відображає локальних особливостей фактичних відліків даної реалізації. Це має місце і для всіх інших методів із завданням функцій регресії.

## 11.5 Згладжування даних

Згладжування даних, як спотворених перешкодами, так і статистичних за своєю природою, можна вважати окремим випадком регресії без визначення символічної форми її функції. У Mathcad для згладжування застосовуються наступні функції:

- **supsmooth(X,Y)** – повертає вектор лінійно згладжених даних **Y**, метод найменших квадратів по **k** відліків з адаптивним вибором значення **k** з урахуванням динаміки зміни даних. Значення вектора **X** повинні йти в порядку зростання.
- **ksmooth(X,Y,b)** – обчислює вектор згладжених даних на основі розподілу Гауса. Параметр **b** задає ширину вікна згладжування і повинен бути у декілька разів більше інтервалу між відліками по осі **X**.
- **medsmooth(Y,b)** – обчислює вектор згладжених даних за методом ковзної медіани з шириною вікна **b**, яке повинне бути непарним числом.

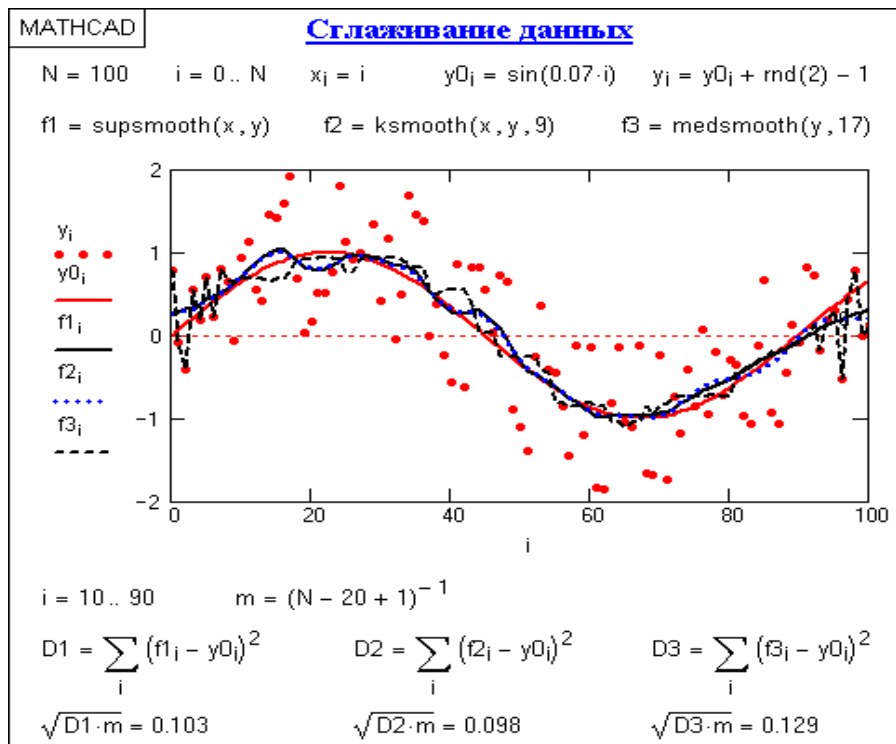


Рисунок 11.7. – Згладжування даних

Зіставлення методів згладжування приведені на рисунку 11.7. Як можна бачити на цьому малюнку, якість згладжування функціями **supsmooth(X,Y)** і **ksmooth(X,Y,b)** практично ідентично (при відповідному виборі параметра **b**). Медіанний спосіб поступається по своїх можливостях двом іншим. Можна відмітити також, що на кінцевих точках інтервалу завдання даних якість згладжування погіршується, особливо в медіанному способі, який взагалі не може виконувати свої функції на кінцевих інтервалах завдовжки **b/2**.

## 11.6 Прогноз залежностей

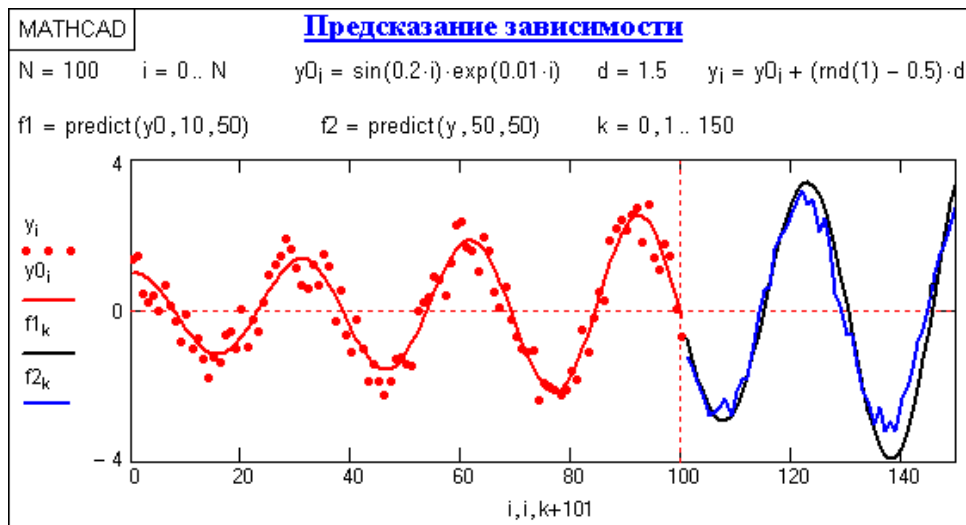


Рисунок 11.8. – Прогноз залежностей

Функція Mathcad **predict(Y,n,K)**, де **n** – ступінь полінома апроксимації вектора рівномірно розподілених даних **Y**, дозволяє обчислити вектор точок прогнозу (екстраполяції) поведінки довільного сигналу за межами його завдання (за збільшенням координат **x**). Прогноз тим точніше, чим гладшу форму має заданий сигнал. Приклад використання функції приведений на рисунку 11.8, для гладкої і статистично зашумленої сигнальної кривої. Ступінь апроксимуючого полінома визначає глибину використання вхідних даних і може бути достатнє невеликою для гладких і монотонних сигналів. Помилка прогнозування збільшується у міру видалення від заданих даних.

### Контрольні питання:

1. Апроксимація даних.
2. Постановка завдання регресії
3. Лінійна регресія
4. Поліноміальна регресія
5. Нелінійна регресія
6. Згладжування даних. Зіставлення методів згладжування Mathcad
7. Прогноз залежностей в Mathcad

## 12. МОДЕЛЮВАННЯ ПРИ РІШЕННІ ІНЖЕНЕРНИХ ЗАВДАНЬ

### 12.1 Класифікація моделей

Будь-який матеріальний об'єкт характеризується незліченним безліччю властивостей, ознак і характеристик, але наші знання про матеріальний об'єкт кінцеві і відносні на будь-якому етапі розвитку.

Існують різні способи класифікації моделей:

- по класах завдань;
- по області використання;
- за способом уявлення і ін.

3 класів завдань, по яких розділяють моделі, можна назвати: аналіз, синтез, конструювання, проектування, управління, утилізація і тому подібне

По області використання моделі розділяють:

- навчальні – наочні посібники, різні тренажери, повчальні програми;
- досвідчені – копії об'єктів, які використовуються для дослідження об'єкту і прогнозування його характеристик в майбутньому;
- науково-технічні, використовувані для дослідження процесів і явищ (різні стенди, що моделюють фізичні і природні явища);
- ігрові – військові, економічні, спортивні і ділові ігри;
- імітаційні, які моделюють з тією або іншою точністю роботу об'єкту в різних умовах і, як правило, з урахуванням випадкових чинників.

Спосіб представлення моделі – найбільш важлива ознака класифікації моделей.

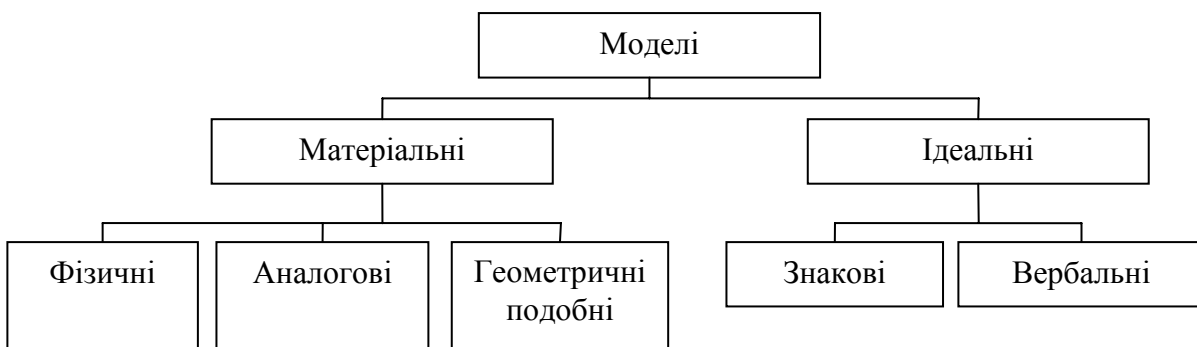


Рисунок 12.1 – Класифікація моделей за способом уявлення

Фізичні моделі мають ту ж природу, що і модельовані об'єкти.

Моделі називають аналоговими – коли дослідження проводяться на моделях, які мають відмінну від початкового об'єкту фізичну природу.

Геометрично подібні моделі – це макети будівель, споруд і природних об'єктів.

Ідеальні моделі носять інформаційний характер. Вони виникають і будуються в свідомості людей і використовуються як будь-яка інформація. Ідеальні моделі залежно від засобів їх зображення, передачі, зберігання і використання підрозділяються на знакових і вербальних.

Знакові моделі використовують яку-небудь формалізовану мову – літературний, математичний, алгоритмічний і ін. Вербальними можна рахувати образні моделі в свідомості людей і передавані ними за допомогою розмовної мови.

Знакові і вербальні моделі взаємозв'язані. Уявний образ, що народився в мозку людини, може вдягнутися в знакову форму, і, навпаки, знакова модель дозволяє сформулювати в свідомості вірний уявний образ.

Математичне уявлення про об'єкт повинне узгоджуватися з можливістю подальшого аналізу і дослідження об'єкту по його математичній моделі. Кожен об'єкт і система можуть моделюватися на різних ієрархічних рівнях сприйняття людиною навколишнього світу. Прийнято розділяти моделювання технічних об'єктів трьома рівнями: мікро-, макро- і метарівень.

## 12.2 Змінні в математичних моделях

Змінні величини, що входять в математичну модель, розрізняють по декількох ознаках.

*По ролі, яку змінні грають по відношенню до об'єкту моделювання.* На рисунку 12.2  $\mathbf{X} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  – вектор вхідних змінних,  $\mathbf{Y} = (y_1, y_2, \dots, y_m)$  – вектор вихідних змінних. У зв'язку з розділенням змінних на вхідних і вихідних розглядаються прямі і зворотні завдання дослідження об'єкту по його математичній моделі. У прямих завданнях по даним про виходи об'єкту досліджується його поведінка в різних умовах (режимах роботи), тоб-то вхідні змінні, структура і параметри моделі відносяться до початкових даних, а вихідні змінні представляють результат дослідження:  $\mathbf{Y} = \mathbf{f}(\mathbf{X})$  або  $\mathbf{F}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = 0$ , де відомі характеристики  $\mathbf{X}$  і  $\mathbf{f}$  або  $\mathbf{F}$ .

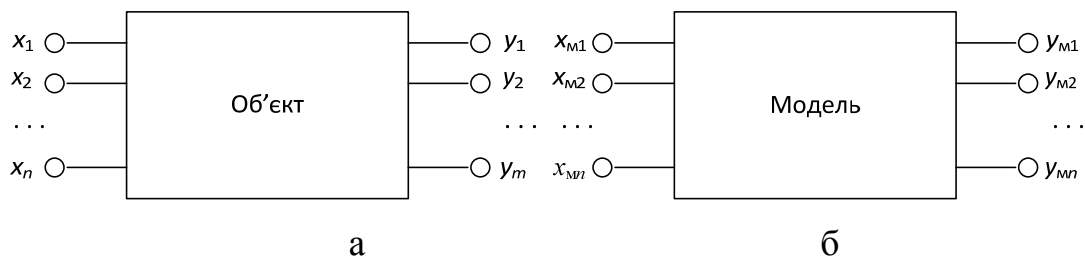


Рисунок 12.2 – Змінні в об'єкті і його моделі

У зворотних завданнях вважаються відомими  $X$  і  $Y$  (доступні для вимірювання і дослідження), а визначенню підлягають невідомі структура і параметри моделі ( $f$  або  $F$ ). Такі завдання називають завданнями ідентифікації.

Вхідні змінні розділяють на керованих (дії, що управляють) і некерованих (обурення). Перші дозволяють виконувати регулювання режиму роботи об'єкту, а другі міняються мимоволі, наприклад погодні умови.

**По схильності дії випадковим чинникам.** Детермінована (визначена) змінна означає, що для неї виключений вплив випадкових чинників – вона задається цілком певним значенням або міняється в часі по певному закону. Деякі змінні за своєю природою або по впливу на них випадкових чинників є випадковими величинами. Процес зміни такої величини в часі називається випадковим або стохастичним процесом. До цих змінних можна віднести потужність навантаження тягової підстанції, яка залежить від завантаження контактної транспортної мережі, або величину активного опору дроту ЛЕП, у великій мірі схильного до впливу температури навколишнього середовища.

У основі опису випадкових змінних лежать методи теорії вірогідності, випадкових процесів і математичної статистики.

**По властивостях безперервності і дискретності.** Зміни безперервних змінних в часі описуються безперервними функціями, які можуть приймати безліч значень в деяких практично завжди наявних межах (рис. 12.3, а). Безперервність, породжена інерційністю матеріальних систем, є їх невід'ємною властивістю. Проте на практиці можливості дозволу близьких значень функцій і її аргументів завжди обмежені; для кожного конкретного випадку можна вказати певну область, в межах якої ці значення стають невиразними для спостерігачів або інструментальних засобів. Очевидно, що таку область досить характеризувати єдиним значенням, що приводить до поняття дискретних змінних (рис. 12.3, б, в, г).



Дискретні змінні підрозділяються на три типи:

- 1) дискретні щодо значень змінної (рис. 12.3, б);
- 2) дискретні щодо часу (рис. 12.3, в);
- 3) дискретні щодо значень змінної і щодо часу (рис. 12.3, г).

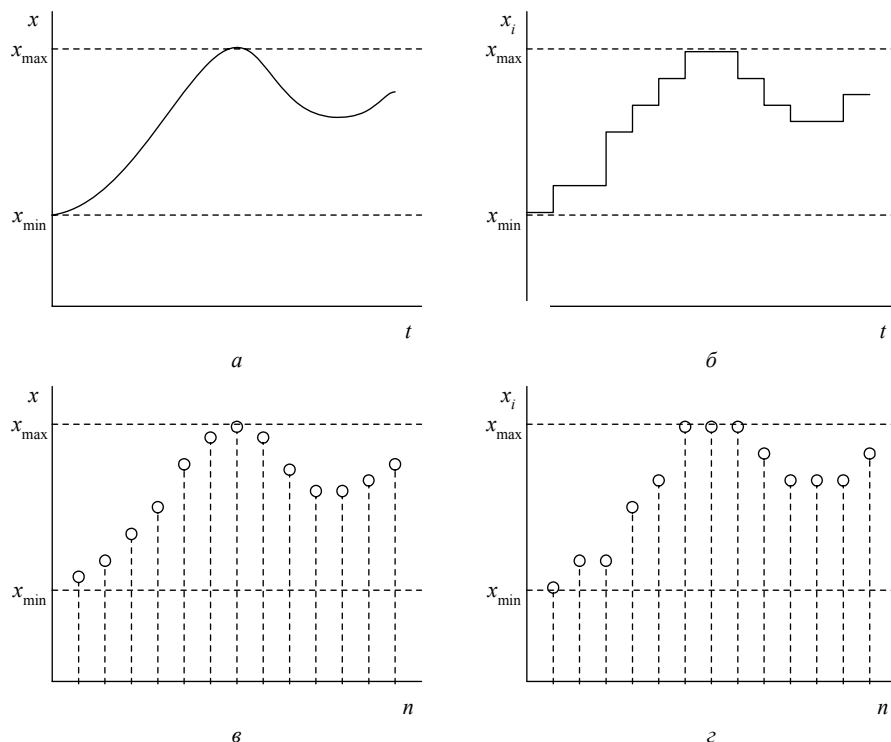


Рисунок 12.3 – Види змінних по властивостях безперервності і дискретності

За способом отримання змінні підрозділяються на спостережуваних і спостережених.

Головна властивість спостережуваних змінних – доступність для спостереження. Проте спостерігаємість сама по собі ще не забезпечує можливості повного дослідження і опису змінною. Необхідно, щоб остання володіла ще властивістю вимірності, т. е. можливістю побудови для досліджуваної величини метрики. Цій вимозі задовольняють безпосередньо вимірювані змінні. Вони є кількісними характеристиками властивостей і параметрів всіляких матеріальних об'єктів і процесів (напруга, струм, швидкість, лінійні розміри і ін.), які визначаються на основі прямого вимірювання, т. е. порівняння з мірою, забезпечені засобами вимірювання і охоплені існуючою системою метрологічного забезпечення.

Тісно пов'язаний з безпосередньо вимірюваними і наступний клас змінних – побічно вимірювані.

Побічно вимірювана змінна  $x$  сама по собі не є об'єктом вимірювання, а часто і в принципі не може бути безпосередньо зміряна. Замість неї безпосередньому вимірюванню піддаються інші, допоміжні змінні ( $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ ), які пов'язані з досліджуваною змінною функціональною залежністю  $x = f(\alpha, \beta, \gamma, \dots)$ . Це дозволяє обчислити значення шуканої змінної за наслідками прямих спостережень допоміжних величин, наприклад, обчислити об'єм тіла за наслідками вимірювання його лінійних розмірів. При випробуваннях силових трансформаторів в електричних мережах температуру його обмоток визначають методом вимірювання їх опорів постійному струму, т. е. температура – побічно вимірювана змінна.

До побічно вимірюваних змінних відносять такі штучно сконструйовані ідеальні утворення, які взагалі не спостережувані: математичне очікування, дисперсія, ентропія і ін.

Спостережені змінні підрозділяють на принципово спостережені і технічно спостережені.

Принципово спостережені змінні не існують як компоненти реального миру і тому піддаються визначенню тільки непрямыми методами, зокрема на основі непрямих вимірювань (статистичні характеристики).

Технічно спостережені змінні характеризують такі матеріальні явища, які або не забезпечені технічними засобами, необхідними для вимірювання і оцінювання, або протікають в умовах, коли інструментальний доступ до них неможливий.

Кожна змінна, пов'язана з матеріальним об'єктом, може змінювати свої значення лише в деяких кінцевих межах, які обумовлені фізичними властивостями об'єкту і характером вирішуваного завдання. Дані про ці межі – обмеження на змінні – істотні при побудові і використанні всіх видів моделей, а в оптимізаційних завданнях, де необхідно знайти оптимальне значення так званої цільової функції, обмеження є головною частиною самої моделі.

З математичної точки зору розрізняють обмеження типу простих нерівностей:  $X_{\min} \leq X \leq X_{\max}$ ,  $Y_{\min} \leq Y \leq Y_{\max}$  – паралелепіпедні обмеження і функціональні обмеження, що фіксують граничні значення деякої величини у функції від інших змінних:  $f_{\min}(X) \leq Z \leq f_{\max}(X)$  і т. п.

У практиці моделювання виділяють так звані жорсткі обмеження, які є абсолютними (наприклад, кут повороту лопатки турбіни – «до упору»), і обмеження м'які, такі, що допускають короточасні порушення встановленої межі значень змінної (наприклад, верхньої межі робочої напруги на електродвигуні).

У загальному випадку дані про обмеження на змінні входять до складу моделі як обов'язкова складова частина.

### 12.3 Адекватність і ефективність математичних моделей

Математичний опис об'єкту може мати різний ступінь відповідності (адекватності) об'єкту-оригіналу. Як правило, дослідник прагне до повнішого і точнішого віддзеркалення в моделі властивостей об'єкту. Це природне прагнення пояснюється невизначеністю, яка неминуче присутня при побудові моделей. Не можна заздалегідь точно знати, які властивості об'єкту важливі для вирішуваного завдання, а які – неістотні. Така невизначеність тим більше, чим менше дослідник знає досліджуваний об'єкт і менше його досвід у вирішенні подібних завдань.

Таким чином, вимога повноти відповідності моделі об'єкту-оригіналу є однією з її якостей. Мало того, зайва повнота моделі в більшості випадків навіть шкідлива, оскільки приводить до такого ускладнення моделі, що її використання стає неможливим. Тому інша якість моделі – це її простота.

Модель з оптимальним поєднанням якостей адекватності і простоти можна назвати ефективною (практично корисною) моделлю. Математично таке поєднання відповідає максимуму так званої «функції корисності», і, якщо ця функція може бути записана, відшукування її максимуму можливе відомими оптимізаційними методами.

Використовуючи термін «точність математичного моделювання», можна мати на увазі адекватність моделі, наприклад, говорять: точна або наближена формула, лінеаризована (т. е. приблизно замінена лінійною) залежність і т. д.

Розглянемо математичну модель лінії електропередачі (ЛЕП) високої напруги. У неї входять такі параметри, як активний опір, індуктивність самоіндукції і взаємоіндукції проводів, а також ємкості між проводами і проводами і землею. Висота підвісу проводів і заземлених грозозахисних тросів на лінії впливає на величину ємкостей між проводами і землею. Чи слід у розрахунках режимів ЛЕП враховувати близькість землі? В деяких випадках при достатньо довгих ЛЕП визначення ємкісних параметрів вимагає уточнення в частині впливу землі, а при невеликих довжинах ліній це не обов'язково.

При аналізі адекватності, ефективності і точності окремих математичних моделей використовуються деякі чисельні оцінки. Отримання цих оцінок майже завжди пов'язане з великими труднощами, оскільки вимагає проведення натурних (на об'єкті-оригіналі) або обчислювальних (по реалізаціях по точнішій моделі) експериментів. Іноді такі експерименти вимагають великих

матеріальних і тимчасових витрат, але проводити їх необхідно, оскільки це єдиний спосіб оцінити якість математичних моделей.

## 12.4 Властивості об'єктів моделювання

Технічні об'єкти мають найрізноманітніші внутрішні властивості і взаємодії з навколишнім світом. Розглянемо внутрішні властивості об'єктів моделювання, які необхідно враховувати при побудові моделей.

Під структурою об'єкту зазвичай розуміють сукупність елементів, що входять до складу об'єкту, і зв'язків між ними. Структура математичної моделі – це сукупність змінних і параметрів, записаних в математичному виразі, наприклад:

$$z = a \cdot x^2 + b \cdot x + c \cdot y^2 + e \cdot x \cdot y. \quad (12.1)$$

Тут змінними є величини  $x$ ,  $y$  і  $z$ , а параметрами – коефіцієнти  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$ ,  $e$ .

Параметри – це кількісні характеристики внутрішніх властивостей об'єкту, які відбиваються його структурою, а в математичній моделі вони є коефіцієнтами, що входять в математичний вираз.

Розглянемо властивості об'єктів з погляду моделювання.

### 1) Безперервність і дискретність

Переважає більшість різних технічних об'єктів мають властивість безперервності змінних, т. е. властивість приймати незліченну множину скільки завгодно близьких значень. Стани цих об'єктів описуються макроскопічними фізичними величинами: температурою, швидкістю, тиском, просторовими координатами, електричним струмом і т. п. Математичні структури, що адекватно описують такі об'єкти, очевидно, теж повинні бути безперервними. Тому при модельному описі об'єктів з безперервними змінними використовують головним чином апарати диференціальних і інтегральних рівнянь, передавальні функції, частотні характеристики і ін.

Дискретні змінні можуть приймати деяке, практично завжди кінцеве, число наперед заданих значень. Характерними прикладами об'єктів з дискретними змінними є релейні схеми перемикачів, комутаційні системи АТС, цифрові обчислювальні машини. Основою формалізованого опису об'єктів з дискретними змінними є апарат математичної логіки. Дискретні методи аналізу в даний час набули широкого поширення для опису і дослідження об'єктів з безперервними змінними. При цьому унаслідок кінцівки розрядної сітки ЦВМ значення безперервних величин округляються до дискретних значень, а початкові диференціальні рівняння в приватних похідних замінюються

еквівалентними кінечно-різницевиими. На відміну від моделей з дискретними змінними за своєю суттю моделі з безперервними змінними, представлені дискретно, називають такими, що дискретизують.

## **2) Стаціонарність і нестаціонарна**

Строго кажучи, якісь зміни мають місце в будь-якому реальному об'єкті, проте в тих випадках, коли вони настільки малі, що можуть не враховуватися при моделюванні, об'єкт розглядається як стаціонарний. Стаціонарність припускає незмінність і структури, і параметрів об'єкту. Тому стаціонарний об'єкт описується математичним виразом, який включає тільки постійні коефіцієнти.

Нестаціонарні об'єкти мають в загальному випадку що змінюються в часі структуру і параметри.

У технічних об'єктах доводиться стикатися з нестаціонарною як структури, так і параметрів об'єкту. Так, наприклад, в електроенергетичній системі протягом часу відключаються і включаються окремі елементи (лінії, трансформатори, генератори) і змінюються їх параметри залежно від різних зовнішніх чинників (температура, вологість, старіння ізоляції і ін.).

Принципових утруднень облік нестаціонарної щодо параметрів в математичному описі об'єкту не викликає, хоча ускладнює модель і її дослідження. У тих випадках, коли з'являється необхідність досліджувати об'єкти змінної структури, загальне нестаціонарне завдання, як правило, розчленовують на ряд стаціонарних щодо структури підзадач, вирішення яких відшуковують окремо, а потім об'єднують в одне.

## **3) Розподіленість і зосередженість параметрів**

У просторово протяжних об'єктах, що зокрема включають безперервні середовища (гази, рідини, тверді середовища), коли час розповсюдження фізичних, наприклад коливальних явищ, виявляється сумірним з інерційними ефектами, адекватний опис процесів вимагає обліку як тимчасових, так і просторових координат. Об'єкти такого роду, засобом опису яких служать диференціальні рівняння в приватних похідних, відносяться до класу об'єктів з розподіленими параметрами. З математичної точки зору об'єкти з розподіленими параметрами є полем, що існує в просторово-часовому континуумі, а змінні відповідних моделей в загальному випадку суть функції часу і просторових координат. Математичний апарат, що строго описує об'єкти

з розподіленими параметрами, істотно складніше, ніж апарат об'єкту із зосередженими параметрами. Тому на практиці завжди, де це можливо, удаються до апроксимації, тобто замінюють розподілені параметри на зосереджені, наприклад, розбиваючи простір на невеликі елементи (підпростори) або роблячи коректування зосереджених параметрів.

#### 4) Одновимірні і багатовимірні об'єкти

Зазвичай під кількістю вимірювань розуміють число виходів (вихідних змінних). Для моделювання багатовимірних об'єктів використовують векторно-матричне уявлення.

#### 5) Статичні і динамічні об'єкти

Статичні об'єкти знаходяться в «застиглому» стані або розглядаються в який-небудь момент часу безвідносно того, яким був його стан у минулому або буде в майбутньому. Динаміка розглядає причинно-наслідкові ланцюжки і можливість прогнозування майбутніх станів об'єктів. Кожен динамічний об'єкт має властивість наслідку (інерції) – стан рухомого тіла в деякий момент часу визначається не тільки силами, що діють в той момент, але і попередніми діями: стан об'єкту має передісторію його руху. У диференціальних рівняннях передісторія об'єкту задається початковими умовами.

Таблиця 12.1 – Час внутрішньої пам'яті об'єкту

Тип системи (об'єкта)	Пам'ять	
	Одиниця вимірювання	Порядок
Радіоелектронні системи	с	$10^{-3} \dots 10^{-9}$
Механічні і електромеханічні системи (машини, агрегати, генератори і ін.)	с	$10^{-2} \dots 10$
Крупні транспортні системи (судна, ж/д транспорт, нафто- і газопроводи)	мін	1 ... 10
Крупні термічні агрегати (металургійні печі, казани)	ч	1 ... $10^2$
Виробничо-економічні системи	місяці	$10^{-1} \dots 10$
Крупні виробничо-економічні системи	місяці, роки	–
Крупні екосистеми, біосферні процеси	роки, десятиліття	–
Масові соціально-психологічні явища (ціннісні установки, переконання, світогляди)	сторіччя	–

## б) Види фізичних об'єктів

Розглядаючи об'єкти моделювання, часто обмежуються дослідженням фізичних властивостей одного роду: теплових, електричних, магнітних, механічних і т. д. Але в тих випадках, коли в об'єкті відбувається передача або перетворення енергії, потрібний облік властивостей різного роду, наприклад електромагнітних, теплоелектричних, тепломеханічних, електромеханічних і ін. Математичний апарат, використовуваний для моделювання різних фізичних систем, може виявитися однаковим. Так, наприклад, обертальна механічна система і електричний ланцюг з джерелом ЕДС і конденсатором описуються однаковими з погляду математики рівняннями.

## 12.5 Математичні моделі на мікрорівні

Розглянемо моделі технічних систем на мікрорівні. В більшості випадків це розподілені моделі (об'єкти з розподіленими параметрами) і вони є системами диференціальних рівнянь в приватних похідних. При створенні математичних моделей доцільно виходити з основних фізичних законів в їх найбільш «чистому», фундаментальному вигляді. Такий підхід забезпечує найбільш адекватний опис об'єктів, протікання процесів і явищ навколишнього нас світу.

Фундаментальними фізичними законами в першу чергу є закони збереження маси, кількості руху, енергії. Загальний вид рівнянь, складових основу більшості розподілених моделей, буде наступним:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \operatorname{div} \vec{J} + G, \quad (12.2)$$

де  $\varphi$  – деяка фазова змінна, що виражає субстанцію (щільність, енергію і т. п.);

$\vec{J}$  – потік фазової змінної;

$G$  – швидкість генерації субстанції;

$t$  – час.

Потік фазової змінної  $\varphi$  є вектор  $\vec{J} = (J_x, J_y, J_z)$ . Дивергенція (розбіжність) цього вектора визначається загальним співвідношенням

$$\operatorname{div} \vec{J} = \frac{\partial J_x}{\partial x} + \frac{\partial J_y}{\partial y} + \frac{\partial J_z}{\partial z}, \quad (12.3)$$

є скалярною величиною і характеризує суму притоки-стоку через поверхню елементарного об'єму.

## Рівняння безперервності електричного струму

Рух електричних зарядів через поверхню елементарного об'єму записується у вигляді

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\operatorname{div} \vec{\delta}, \quad (12.4)$$

де  $\rho$  – об'ємна щільність електричних зарядів;

$\vec{\delta}$  – вектор щільності струму провідності і зсуву.

Приведені приклади показують однотипність математичних моделей на мікрорівні, але в той же час використання математичних моделей об'єктів у вигляді системи диференціальних рівнянь в приватних похідних можливо для простих технічних систем, оскільки їх рішення натрапляє на значні труднощі.

## 12.6 Моделювання на макрорівні

Моделі макрорівня виходять, коли відбувається перехід від розподілених параметрів до зосереджених – виділяються крупні елементи об'єктів і їх параметри зосереджуються в одній крапці: маса балки виявляється зосередженою в центрі тяжкості, поле потенціалів характеризується величиною однієї напруги, потік електронів моделюється електричним струмом і т. п. Математичними моделями на макрорівні є звичайні диференціальні або інтегро- диференційні рівняння.

Поведінка (стан) модельованих об'єктів, що складаються з фізично однорідних елементів, в яких описуються процеси певної фізичної природи (механічні, електричні, гідравлічні, теплові), можна характеризувати за допомогою фазових змінних двох типів – типу потенціалу і типу потоку.

В табл. 12.2 приведені типи фазових змінних для об'єктів різної фізичної природи.

Таблиця 12.2 – Фазові змінні для різних фізичних систем

Система	Фазові змінні	
	типу потенціалу	типу потоку
Електрична	Електрична напруга	Електричний струм
Механічна	Швидкість	Сила
Механічна обертальна	Кутова швидкість	Обертальний момент
Теплова	Температура	Тепловий потік
Гідравлічна і пневматична	Тиск	Витрата



У більшості технічних об'єктів можна виділити три типи пасивних простих елементів:

- типу **R** – елемент розсіювання (дисипації) енергії (як правило, перетворення енергії в теплову і її розсіювання);

- типу **C** і типу **L** – елементи накопичення потенційної і кінетичної енергії.

Окрім пасивних елементів, існують два активні елементи – джерело напруги і джерело струму.

Рівняння, що описують властивості елементів об'єкту, називають **компонентними**. У них входять змінні типу потенціалу і типу потоку. Спосіб зв'язку елементів відбивається за допомогою інших рівнянь, які називають **топологічними**. У них входять змінні одного типу: або потенціалу, або потоку. Топологічні рівняння можуть виражати закони збереження, умови безперервності, рівноваги, балансу і т. п.

Математичні моделі об'єктів є сукупність компонентних і топологічних рівнянь.

Розглянемо приклади компонентних і топологічних рівнянь для деяких різних за своєю фізичною природою об'єктів.

#### 1) Електричні системи

Основними фазовими змінними електричних систем є напруга і струми в різних елементах систем. Компонентні рівняння елементів мають вигляд:

$$U = R \cdot I, \quad I = C \frac{dI}{dt}, \quad U = L \frac{dI}{dt}, \quad (12.5)$$

де **U** – напруга;

**I** – струм;

**R** – опір;

**C** – ємність;

**L** – індуктивність.

При з'єднанні резисторів, ємностей, індуктивностей між собою утворюється схема, з'єднання елементів в якій відбивається топологічними рівняннями. Ними є закони Кірхгофа:

$$\sum_j I_j = 0, \quad \sum_i U_i = 0, \quad (12.6)$$

де рівняння струмів записуються для вузлів, а рівняння напруги для контурів. У ЕЕС є достатньо складні елементи, і при їх моделюванні застосовують схеми заміщення, що складаються з опорів, ємностей і індуктивностей.

Топологічні рівняння для будь-яких з розглянутих вище систем строго визначені тільки для сталих режимів. У тих випадках, коли час розподілу збуджень (змін фазових змінних) по гілках системи сумарно з тривалістю інтервалів часу, на яких ведеться дослідження, або перевищує їх, застосовувати такі рівняння в приведеній вище формі не можна.

Межі застосовності топологічних рівнянь визначаються швидкостями розповсюдження збуджень, розмірами компонентів системи і частотами зміни фазових змінних. Наприклад, для електричних систем швидкість розповсюдження збуджень є швидкість світла або електромагнітних хвиль у відповідному середовищі, а для механічних, гідравлічних і пневматичних – це швидкість розповсюдження звуку у відповідному середовищі.

## 12.7 Моделювання на метарівні

Математичні моделі на мікрорівні враховували розподіленість параметрів об'єкту в просторі. Перехід на макрорівень характеризується дискретизацією простору – параметри об'єкту вважаються зосередженими в окремих точках простору. Метарівень має математичні моделі, де вводяться ще більші допущення і спрощення, що дозволяє отримувати доступні для дослідження математичні моделі великих об'єктів і систем.

Існує декілька способів побудови математичних моделей на метарівні, до них відносяться:

- 1) дискретизація часу, т. е. разом з введенням зосереджених параметрів змінні і параметри моделі вважаються незалежними безперервно від часу;
- 2) втрати енергії в об'єкті не враховуються;
- 3) перехід до факторних моделей;
- 4) перехід до функціональних моделей, в яких використовується тільки один вид фазової змінної – сигнал;
- 5) еквівалентування – заміна великих систем їх спрощеними моделями – еквівалентами, створеними на основі спеціальних критеріїв, і ін.

## Контрольні питання

1. Яка властивість моделі є фундаментальною?
2. Як класифікуються моделі?
3. По яких ознаках розрізняють змінні в математичних моделях?
4. Чим розрізняються прямі і зворотні завдання дослідження об'єкту при його моделюванні?
5. Як підрозділяються дискретні змінні в математичних моделях?
6. Поясніть властивість адекватності математичної моделі.
7. Назвіть попарно протилежні властивості об'єктів з погляду моделювання.
8. Що є математичними моделями на мікро-рівні?
9. Що є математичними моделями на макро-рівні?
10. Що є математичними моделями на метарівні?

## 13. ЛІНІЯ ЕЛЕКТРОПЕРЕДАЧІ

### 13.1 Конструктивне виконання і властивості лінії електропередачі

У простому уявленні лінія електропередачі – це провідники, протягнуті на велику відстань, по яких передається електрична енергія. Можливість передачі електроенергії обумовлена головним чином великою напругою, при якій втрати при передачі знижуються до прийняттого рівня.

Конструктивно повітря ЛЕП є дротами, підвішеними на безпечній відстані від землі, або кабелями, в яких провідні жили ізольовані один від одного і від зовнішнього середовища і захищені різними покриттями і бронею. Залежно від конструкції ЛЕП називають повітряними (ВЛ) або кабельними лініями (КЛ).

Практично у всьому світі для передачі електричної енергії прийнята система трифазного змінного струму 50 або 60 Гц. Проте в деяких випадках застосовуються інші системи змінного струму і передачі постійного струму. Розглядатимемо тільки трифазні повітряні лінії змінного струму високої напруги (до 1150 кВ), передавальні електроенергію на великі відстані (до декількох тисяч кілометрів).

Передача електроенергії по ЛЕП змінного струму обумовлена розповсюдженням електромагнітного поля в проводах і навколишньому просторі. Виникнення змінного електростатичного поля приводить до появи струмів зсуву – зарядних струмів (рис. 13.1). Зарядні струми, накладаючись на струм навантаження, визначають поступову зміну струму уздовж лінії. Магнітне поле, обумовлене струмом лінії, характеризується напруженістю, лінії, що також змінюється уподовж. Це приводить до наведення ЕДС самоіндукції і взаємоіндукції, нерівних для різних ділянок лінії. Нерівність цих ЕДС визначає складний закон зміни напруги уздовж лінії, що у свою чергу визначає зміну струмів зсуву уздовж лінії.

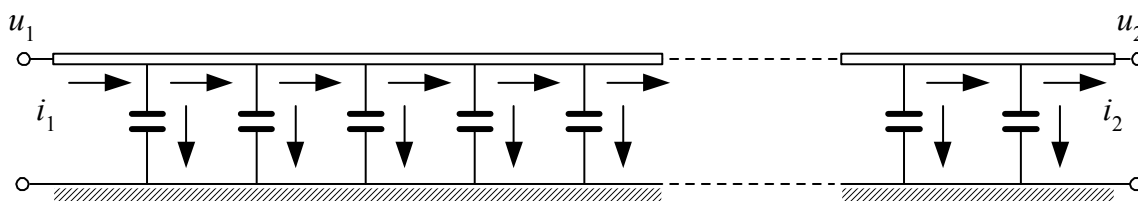


Рисунок 13.1 – Умовне зображення розподілу струмів уздовж дроту ЛЕП

У загальному випадку ЛЕП слід розглядати як об'єкт з розподіленими уздовж однієї просторової координати параметрами (уздовж лінії). Параметри лінії електропередачі, до яких відносяться активний опір, індуктивність, активна провідність і ємкість на одиницю довжини, вважають рівномірно розподіленими уздовж її довжини. Таку властивість ліній називають однорідністю.

Дроти ВЛ мають як провідний матеріал алюміній або його сплав. Практично завжди використовуються сталевалюмінієві дроти мазкі АС. Їх питомий опір постійному струму в середньому рівний  $\rho = 29,1 \text{ Ом мм}^2 / \text{км}$ . Активний опір змінному струму більше опору постійному струму унаслідок поверхневого ефекту, проте для частоти 50 Гц ця відмінність неістотна. Активний опір в електричних схемах ЛЕП є параметром, що визначає процес дисипації (розсіювання) енергії у вигляді віддачі тепла в навколишній простір.

Індуктивність ЛЕП викликана явищами самоіндукції і взаємоіндукції фаз лінії і визначається залежно від діаметру проводів фази і відстані між фазами. У практиці розрахунків електричних мереж використовують індуктивний опір фаз ЛЕП. Погонний індуктивний опір ВЛ 330–1150 кВ  $x_0$  в середньому рівне  $0,31 \text{ Ом} / \text{км}$ .

Унаслідок недосконалості ізоляції ВЛ і явища корони в місцях приєднання проводів до гірлянд ізоляторів ВЛ мають місце втрати електроенергії від струмів витоку по ізоляторах ВЛ і корони. Великий вплив на ці втрати роблять вологість і забруднення навколишнього повітря. Залежно від погоди втрати від струмів витоку і на корону можуть змінюватися в десятки разів.

Моделювання втрат в ізоляції ВЛ можна виконати за допомогою введення активної провідності  $g_0$ , величина якої визначається за експериментальними даними, отриманими в результаті спостережень і розрахунків існуючих ВЛ. Для більшості ВЛ 330–1150 кВ погонна активна провідність задається в межах  $0,01 \dots 0,1 \text{ мкСм} / \text{км}$ .

Ємкісна провідність між фазами і між проводами і землею, грозозахисними тросами і заземленими частинами опори моделюються одним параметром – ємкісною провідністю фази  $b_0$ . Величина погонної ємкісної провідності ВЛ 330–1150 кВ в середньому складає  $3,5 \text{ мкСм} / \text{км}$ .

У ланцюзі з розподіленими параметрами інтервал часу розповсюдження електромагнітних хвиль уздовж лінії зіставимо з інтервалом часу, протягом якого струми і напруга змінюються на помітну величину від повної їх зміни.

Іншими властивостями лінії електропередачі можна вважати:

- безперервність змінних;
- стаціонарність;
- одновимірність відносно простору і багатовимірність відносно змінних, що характеризують роботи лінії в різних точках лінії;
- статизм або динамічність (залежно від досліджуваних процесів);
- лінійність або нелінійність (залежно від рівнянь, що описують режим роботи лінії) – при цьому параметри лінії вважаються постійними величинами.

Відносно детермінованої і стохастичності розглядаються різні підходи до моделювання лінії – параметри і змінні можуть бути представлені також і випадковими величинами.

## 13.2 Математична модель лінії з розподіленими параметрами

Елементи ЕЕС є, як правило, трифазними пристроями змінного струму, і ЛЕП має три фази, які приєднуються до інших трифазних елементів мережі, наприклад, підвищуючі трансформатори і знижуючі трансформатори (рис. 13.2, а).

Тут і далі розглядатимемо тільки симетричні трифазні системи, які унаслідок симетрії можна графічно зображати в однолінійному вигляді (рис. 13.2, б маючи на увазі, що змінний струм, що протікає по фазі, замикається через дві інші фази. Крім того, трифазна система має нейтраль **N**, яка технічно може бути відсутнім, але струми витоку і ємкісні струми в лінії можуть моделюватися за допомогою введення нейтральної крапки (лінії, площини). На рисунку 13.2 з'єднання обмоток трансформаторів в зірку дає нейтральні точки трифазної системи, які можуть мати з'єднання із землею (заземлення).

Виділимо в лінії на відстані  $x$  від початку лінії (рис. 13.2, а, точка **1**) ділянку нескінченно малої довжини  $dx$ . На цій ділянці лінії електричні параметри можна вважати зосередженими (рис. 13.3).

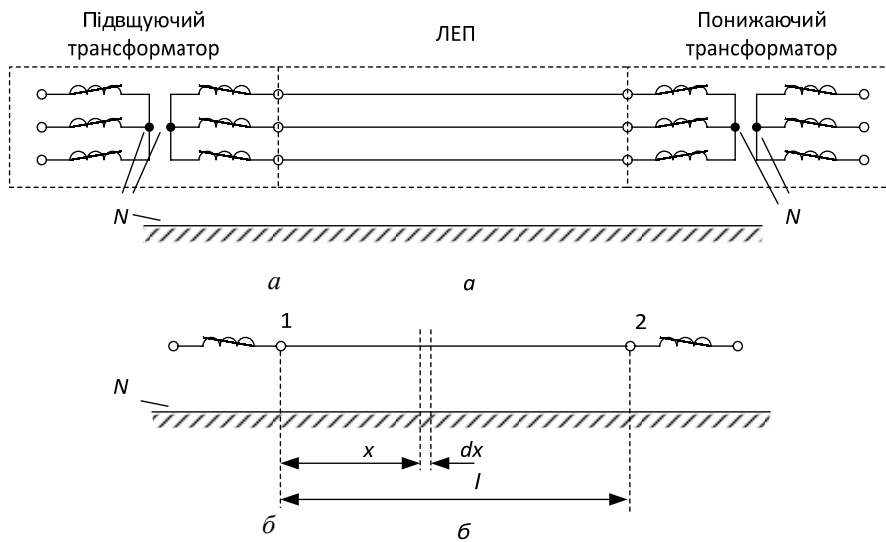


Рисунок 13.2 – Трифазна лінія електропередачі (а) і її однолінійне зображення (б)

Складемо рівняння Кірхгофа для електричного ланцюга на виділеній ділянці лінії:

$$\begin{aligned} (-u) + \left( u + \frac{\partial u}{\partial x} dx \right) + \left( r_0 dx i + L_0 dx \frac{\partial i}{\partial t} \right) &= 0, \\ (-i) + \left( i + \frac{\partial i}{\partial x} dx \right) + \left( g_0 dx u + C_0 dx \frac{\partial u}{\partial t} \right) &= 0 \end{aligned} \quad (13.1)$$

або

$$\begin{aligned} -\frac{\partial u}{\partial x} &= r_0 i + L_0 \frac{\partial i}{\partial t}, \\ -\frac{\partial i}{\partial x} &= g_0 u + C_0 \frac{\partial u}{\partial t}. \end{aligned} \quad (13.2)$$

Тут в  $C_0$  і  $L_0$  враховані впливи сусідніх фаз лінії.

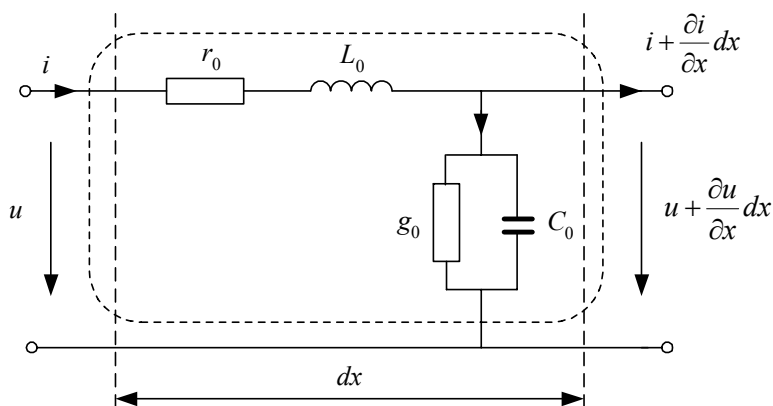


Рисунок 13.3 – Елементарний відрізок лінії

Отримані рівняння є диференціальними рівняннями в приватних похідних – моделлю ділянки лінії на мікрорівні. Незалежні змінні в них – це час  $t$  і одна просторова координата  $x$ .

Використовуючи символічний метод представлення синусоїдальних функцій часу комплексними величинами, для значень струмів і напруги, що діють, можна записати:

$$\begin{aligned} -\frac{d\underline{U}}{dx} &= r_0 \underline{I} + j\omega L_0 \underline{I} = (r_0 + j\omega L_0) \underline{I} = \underline{z}_0 \underline{I}, \\ -\frac{d\underline{I}}{dx} &= g_0 \underline{U} + j\omega C_0 \underline{U} = (g_0 + j\omega C_0) \underline{U} = \underline{y}_0 \underline{U}. \end{aligned} \quad (13.3)$$

Отримана система рівнянь вже має одну незалежну змінну  $x$ . Позначимо напругу і струми по кінцях лінії:  $\underline{U}_1$  і  $\underline{I}_1$  при  $x = 0$  і  $\underline{U}_2$  і  $\underline{I}_2$  при  $x = l$ . Тоді з вирішення системи диференціальних рівнянь (13.3) отримаємо зв'язок між напругою і струмами по кінцях лінії:

$$\begin{aligned} \underline{U}_1 &= \text{ch}(\underline{\gamma}_0 l) \underline{U}_2 + \underline{Z}_C \text{sh}(\underline{\gamma}_0 l) \underline{I}_2, \\ \underline{I}_1 &= \frac{1}{\underline{Z}_C} \text{sh}(\underline{\gamma}_0 l) \underline{U}_2 + \text{ch}(\underline{\gamma}_0 l) \underline{I}_2, \end{aligned} \quad (13.4)$$

де  $\underline{Z}_C = \sqrt{\frac{(r_0 + jx_0)}{(g_0 + jb_0)}}$  – хвилевий опір лінії;

$\underline{\gamma}_0 = \sqrt{(r_0 + jx_0)(g_0 + jb_0)} = \alpha_0 + j\beta_0$  – коефіцієнт розповсюдження хвилі;

$\alpha_0$  – коефіцієнт загасання хвилі;

$\beta_0$  – коефіцієнт фази.

Отримані рівняння називаються рівняннями довгої лінії або телеграфними рівняннями.

У (13.4) напруга записана у фазних значеннях. Проте в трифазних системах прийнято указувати лінійні значення напруги, що приводить до перерахунку на  $\sqrt{3}$  деяких доданків:

$$\begin{aligned} \underline{U}_1 &= \text{ch}(\underline{\gamma}_0 l) \underline{U}_2 + \sqrt{3} \underline{Z}_C \text{sh}(\underline{\gamma}_0 l) \underline{I}_2, \\ \underline{I}_1 &= \frac{1}{\underline{Z}_C \sqrt{3}} \text{sh}(\underline{\gamma}_0 l) \underline{U}_2 + \text{ch}(\underline{\gamma}_0 l) \underline{I}_2. \end{aligned} \quad (13.5)$$

Щоб не вводити в запис рівнянь константу  $\sqrt{3}$  і в той же час використовувати лінійні значення напруги, використовують збільшене в  $\sqrt{3}$  значення струму лінії. Таким чином, математична модель довгої лінії має вигляд:



$$\begin{aligned} \underline{U}_1 &= \operatorname{ch}(\gamma_0 l) \underline{U}_2 + \underline{Z}_C \operatorname{sh}(\gamma_0 l) \underline{I}_2, \\ \underline{I}_1 &= \frac{1}{\underline{Z}_C} \operatorname{sh}(\gamma_0 l) \underline{U}_2 + \operatorname{ch}(\gamma_0 l) \underline{I}_2. \end{aligned} \quad (13.6)$$

Тут  $\underline{I}_1$  і  $\underline{I}_2$  – фазні струми лінії, збільшені в  $\sqrt{3}$ .

Коли необхідно обчислити напругу і струм в якій-небудь іншій точці лінії, що знаходиться на відстані  $x$  від початку лінії (рис. 13.4), по напрузі і струму в кінці, використовують модель:

$$\begin{aligned} \underline{U}_x &= \operatorname{ch}[\gamma_0 (l-x)] \underline{U}_2 + \underline{Z}_C \operatorname{sh}[\gamma_0 (l-x)] \underline{I}_2, \\ \underline{I}_x &= \frac{1}{\underline{Z}_C} \operatorname{sh}[\gamma_0 (l-x)] \underline{U}_2 + \operatorname{ch}[\gamma_0 (l-x)] \underline{I}_2. \end{aligned} \quad (13.7)$$

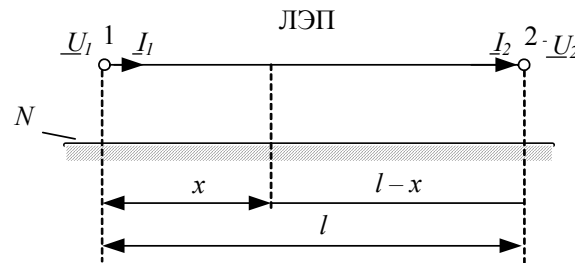


Рисунок 13.4 – Визначення напруги і струму в крапці на лінії

Формальна напруга і струм в будь-якій точці лінії можна розглядати як результат накладення двох хвиль, рухомих в протилежні сторони. З часом хвиля напруги переміщається від початку лінії до її кінця; вона носить назву прямої або падаючої хвилі. Хвиля напруги, яка переміщається від кінця лінії до її початку, носить назву зворотної або відбитої хвилі.

Розрахунки показують, що для повітряних ліній електропередачі при частоті  $f = 50$  Гц коефіцієнт фази  $\beta_0 \approx 0,001$  рад/км (0,06 град/км). За допомогою цього значення можна знайти довжину прямої і зворотної хвиль.

Введемо поняття довжини хвилі напруги і струму  $\lambda$ , рівною відстані між двома крапками лінії, в яких фази напруги (струму) падаючої або відбитої хвилі напруги (струму) розрізняються на  $2\pi$ .

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta_0} \quad (13.8)$$

де  $\beta_0 = \operatorname{Im}(\gamma_0)$  – коефіцієнт фази.

Швидкість переміщення падаючої хвилі уздовж лінії називається фазовою швидкістю хвилі. Це швидкість переміщення крапки, фаза коливання в якій залишається постійною:

$$\frac{dx}{dt} = v_{\phi} = \frac{\omega}{\beta_0}. \quad (13.9)$$

З цього співвідношення з урахуванням  $\omega = 2\pi f$  набудемо точнішого значення коефіцієнта фази:

$$\beta_0 = \frac{\omega}{v_{\phi}} = \frac{314}{300\,000} = 1,0466 \cdot 10^{-3} \text{ рад/км} \quad (13.10)$$

і довжини хвилі:

$$\lambda = \frac{2\pi}{\omega} v_{\phi} = \frac{v_{\phi}}{f} = \frac{300\,000}{50} = 6000 \text{ км}. \quad (13.11)$$

Лінії з довжиною  $l = \lambda = 6000$  км називають хвилевими, а з  $l = \lambda / 2 = 3000$  км – півхвильовими лініями.

Для спрощення досліджень режимів роботи ЛЕП надвисокої напруги іноді користуються рівняннями ідеальної лінії, в якій активні параметри вважаються рівними нулю:  $r_0 = 0$ ,  $g_0 = 0$ . Очевидно, що при цьому  $\alpha_0 = 0$ .

З урахуванням:

$$\begin{aligned} \text{sh}(j\beta_0 l) &= j \sin(\beta_0 l), \\ \text{ch}(j\beta_0 l) &= \cos(\beta_0 l) \end{aligned} \quad (13.12)$$

отримаємо математичну модель ідеальної лінії:

$$\begin{aligned} \underline{U}_1 &= \cos(\beta_0 l) \underline{U}_2 + jZ_C \sin(\beta_0 l) \underline{I}_2, \\ \underline{I}_1 &= j \frac{1}{Z_C} \sin(\beta_0 l) \underline{U}_2 + \cos(\beta_0 l) \underline{I}_2. \end{aligned} \quad (13.13)$$

### 13.3 Математичні моделі лінії у вигляді схем заміщення

Систему рівнянь (13.6) можна представити як рівняння чотирьохполюсника (рис. 13.5).

$$\begin{aligned} \underline{U}_1 &= \underline{A} \underline{U}_2 + \underline{B} \underline{I}_2, \\ \underline{I}_1 &= \underline{C} \underline{U}_2 + \underline{D} \underline{I}_2. \end{aligned} \quad (13.14)$$



Рисунок 13.5 – Чотирьохполюсник

Тут  $\underline{A} = \underline{D} = \text{ch}(\underline{\gamma}_0 l)$ ;  $\underline{B} = \underline{Z}_C \text{sh}(\underline{\gamma}_0 l)$ ;  $\underline{C} = \frac{1}{\underline{Z}_C} \text{sh}(\underline{\gamma}_0 l)$ , що дозволяє вважати даний

чотириполюсник симетричним.

У практиці розрахунків зручно користуватися П-подібною схемою заміщення лінії (рис. 13.6).

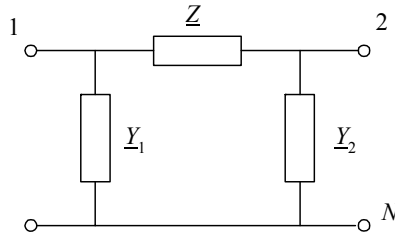


Рисунок 13.6 – П-подібна схема заміщення ЛЕП

Знайдемо співвідношення, що зв'язують параметри П-подібної схеми заміщення  $\underline{Z}$ ,  $\underline{Y}_1$  і  $\underline{Y}_2$  з параметрами моделі довгої лінії (13.6).

Запишемо вираз, що зв'язує напругу на початку  $\underline{U}_1$  і кінці  $\underline{U}_2$  П-подібної схеми заміщення:

$$\underline{U}_1 = \underline{U}_2 + \Delta \underline{U} = \underline{U}_2 + \underline{Z} \underline{I}_Z, \quad (13.15)$$

де  $\Delta \underline{U}$  – падіння напруги в подовжній гілці на параметрі  $\underline{Z}$  схеми заміщення;

$\underline{I}_Z$  – струм в гілці з параметром  $\underline{Z}$ .

Співвідношення між струмами в гілках схеми заміщення виходять з першого закону Кірхгофа:

$$\begin{aligned} \underline{I}_Z &= \underline{I}_2 + \underline{I}_{Y_2}, \\ \underline{I}_1 &= \underline{I}_Z + \underline{I}_{Y_1}. \end{aligned} \quad (13.16)$$

Струми в поперечних гілках з  $\underline{Y}_1$  і  $\underline{Y}_2$  обчислюються по формулах:

$$\begin{aligned} \underline{I}_{Y_1} &= \underline{Y}_1 \underline{U}_1, \\ \underline{I}_{Y_2} &= \underline{Y}_2 \underline{U}_2. \end{aligned} \quad (13.17)$$

Підставимо струм  $\underline{I}_Z$  з (13.16) в (13.15) і з урахуванням (13.17) матимемо:

$$\begin{aligned} \underline{U}_1 &= \underline{U}_2 + \underline{Z} \underline{I}_Z = \underline{U}_2 + \underline{Z} (\underline{I}_2 + \underline{I}_{Y_2}) = \\ &= \underline{U}_2 + \underline{Z} \underline{I}_2 + \underline{Z} \underline{Y}_2 \underline{U}_2 = (1 + \underline{Z} \underline{Y}_2) \underline{U}_2 + \underline{Z} \underline{I}_2. \end{aligned} \quad (13.18)$$

Тепер запишемо співвідношення для струму на початку схеми заміщення  $\underline{I}_1$ , виразив його також через напругу і струм кінця схеми заміщення.

Підставивши у вираз для струму  $\underline{I}_1$  з (13.16) вирази для струму  $\underline{I}_Z$  і струму  $\underline{I}_{Y1}$ , отримаємо:

$$\begin{aligned} \underline{I}_1 &= \underline{I}_Z + \underline{I}_{Y1} = \underline{I}_2 + \underline{I}_{Y1} + \underline{I}_{Y2} = \\ &= \underline{I}_2 + \underline{Y}_1 \underline{U}_1 + \underline{Y}_2 \underline{U}_2. \end{aligned} \quad (13.19)$$

Підставимо в цей вираз  $\underline{U}_1$  з (2.18), матимемо:

$$\begin{aligned} \underline{I}_1 &= \underline{I}_2 + \underline{Y}_1 [(1 + \underline{Z}\underline{Y}_2) \underline{U}_2 + \underline{Z}\underline{I}_2] + \underline{Y}_2 \underline{U}_2 = \\ &= (\underline{Y}_1 + \underline{Y}_1 \underline{Z}\underline{Y}_2 + \underline{Y}_2) \underline{U}_2 + (1 + \underline{Z}\underline{Y}_1) \underline{I}_2. \end{aligned} \quad (13.20)$$

Остаточно отримуємо систему рівнянь для П-подібної схеми заміщення:

$$\begin{aligned} \underline{U}_1 &= (1 + \underline{Z}\underline{Y}_2) \underline{U}_2 + \underline{Z}\underline{I}_2, \\ \underline{I}_1 &= (\underline{Y}_1 + \underline{Y}_1 \underline{Z}\underline{Y}_2 + \underline{Y}_2) \underline{U}_2 + (1 + \underline{Z}\underline{Y}_1) \underline{I}_2. \end{aligned} \quad (13.21)$$

Модель (13.21) по своїй структурі співпадає з рівняннями чотирьохполюсника (13.14). З цього з урахуванням виду моделі довгої лінії (13.6) витікає, що:

$$\begin{aligned} \underline{A} &= (1 + \underline{Z}\underline{Y}_2) = \text{ch}(\underline{\gamma}_0 l), \\ \underline{B} &= \underline{Z} = \underline{Z}_C \text{sh}(\underline{\gamma}_0 l), \\ \underline{C} &= (\underline{Y}_1 + \underline{Y}_1 \underline{Z}\underline{Y}_2 + \underline{Y}_2) = \frac{1}{\underline{Z}_C} \text{sh}(\underline{\gamma}_0 l), \\ \underline{D} &= (1 + \underline{Z}\underline{Y}_1) = \text{ch}(\underline{\gamma}_0 l). \end{aligned} \quad (13.22)$$

Рішення (13.22) щодо параметрів П-подібної схеми заміщення дає:

$$\begin{aligned} \underline{Z} &= \underline{Z}_C \text{sh}(\underline{\gamma}_0 l), \\ \underline{Y}_1 = \underline{Y}_2 &= \frac{\text{ch}(\underline{\gamma}_0 l) - 1}{\underline{Z}_C \text{sh}(\underline{\gamma}_0 l)}. \end{aligned} \quad (13.23)$$

Використовуючи відомі математичні співвідношення:

$$\begin{aligned} \text{sh}(x) &= 2\text{sh}\left(\frac{x}{2}\right)\text{ch}\left(\frac{x}{2}\right), \\ \text{ch}(x) &= 2\text{sh}^2\left(\frac{x}{2}\right) + 1, \end{aligned} \quad (13.24)$$

отримуємо:

$$\begin{aligned} \underline{Z} &= \underline{Z}_C \text{sh}(\underline{\gamma}_0 l), \\ \underline{Y}_1 = \underline{Y}_2 &= \frac{1}{\underline{Z}_C} \text{th} \frac{\underline{\gamma}_0 l}{2}. \end{aligned} \quad (13.25)$$

Для ідеальної лінії параметри П-подібної схеми заміщення виходять у вигляді:

$$\underline{Z} = jZ_C \sin(\beta_0 l),$$

$$\underline{Y}_1 = \underline{Y}_2 = j \frac{1}{Z_C} \operatorname{tg} \frac{\beta_0 l}{2}. \quad (13.26)$$

Знайдемо розподіл величини напруги і струму упродовж ЛЕП 500 кВ довжиною  $L = 500$  км при холостому ході і при передачі потужності навантаження менше і більше натуральної потужності лінії. Конструкція фази лінії: ЗхАС-400/51. Розрахунки і графічні побудови виконаємо в системі Mathcad. Приведені нижче значення параметрів лінії виражені в омах, сименсах і радіанах. Параметри режиму ЛЕП дані в кіловольтах, кілоамперах, мегаватах і мегаварах.

Довжина і погонні параметри лінії.

$L := 500$	$r_0 := 0.025$	$g_0 := 0.023 \cdot 10^{-6}$	$x_0 := 0.306$	$b_0 := 3.62 \cdot 10^{-6}$
$z_0 := r_0 + j \cdot x_0$		$y_0 := g_0 + j \cdot b_0$		

Розрахункові параметри лінії – хвильовий опір, коефіцієнт розповсюдження хвилі і натуральна потужність:

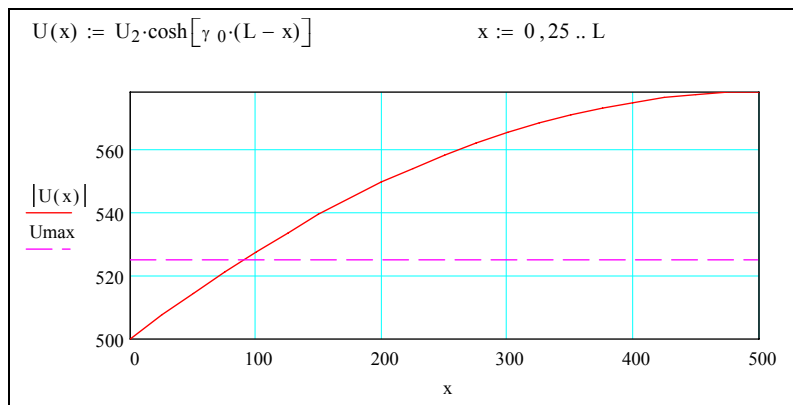
$Z_c := \sqrt{\frac{z_0}{y_0}}$	$\gamma_0 := \sqrt{z_0 \cdot y_0}$
$Z_c = 291.016 - 10.942i$	$\gamma_0 = 4.63 \times 10^{-5} + 1.053i \times 10^{-3}$
$P_{nat} := \frac{U_1^2}{Z_c}$	$P_{nat} = 857.845 + 32.255i$

## Режим холостого ходу

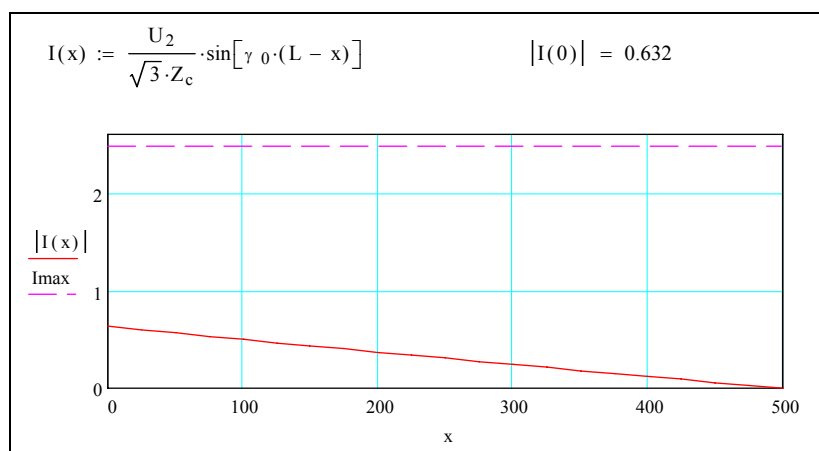
Напруга в кінці лінії:

$U_2 := \frac{U_1}{\cosh(\gamma_0 \cdot L)}$	$ U_2  = 578.152$
--	-------------------

Побудова графіка напруги уздовж лінії в режимі холостого ходу:



Побудова графіка струму уздовж лінії в режимі холостого ходу:



З отриманих залежностей видно, що напруга уздовж ЛЕП починає перевищувати гранично допустиме значення вже на відстані близько 100 км. від початку лінії; такий режим насправді нездійснений із-за перекриття ізоляції на лінії.

Струм по лінії має найбільше значення на початку лінії і не перевищує допустиме значення, рівне 2,475 кА.

### Режим передачі потужності менше натуральною

Натуральна потужність даною ЛЕП рівна 859,9 Мвт. Візьмемо передавану потужність 700 Мвт, реактивну потужність в кінці лінії приймемо рівною нулю:

$$P_{21} := 700 \quad Q_{21} := 0 \quad S_{21} := P_{21} + i \cdot Q_{21}$$

Напруга в кінці ЛЕП знайдемо з рішення системи рівнянь.

Початкові наближення для невідомих  $U_2$ ,  $I_2$ :

$$U_{21} := 500 - i \cdot 100 \qquad I_{21} := \frac{\overline{S_{21}}}{U_{21}}$$

Вирішальний блок:

$$\begin{aligned} &\text{Given} \\ &U_1 = U_{21} \cdot \cosh(\gamma_0 \cdot L) + I_{21} \cdot Z_c \cdot \sinh(\gamma_0 \cdot L) \\ &I_{21} = \frac{\overline{S_{21}}}{U_{21}} \\ &\begin{pmatrix} U_{21} \\ I_{21} \end{pmatrix} := \text{Find}(U_{21}, I_{21}) \end{aligned}$$

Результати вирішення системи рівнянь (напруга і струм в кінці лінії):

$$\begin{aligned} U_{21} &= 462.558 - 210.534i & |U_{21}| &= 508.217 \\ \text{angle}(\text{Re}(U_{21}), \text{Im}(U_{21})) - 2 \cdot \pi &= -24.473 \cdot \text{deg} \\ I_{21} &= 1.254 - 0.571i & |I_{21}| &= 1.377 \end{aligned}$$

Вектор напруги в кінці лінії відстає від вектора напруги на початку на 24,473 градуса.

## Режим передачі потужності більше натуральною

Прийmemo передавану активну потужність по лінії 900 Мвт. Можна переконатися, що при реактивній потужності в кінці лінії, рівної нулю, режим напруги по лінії є незадовільним. Для підтримки задовільної напруги потрібна реактивна потужність ємкісного характеру. Хай потужність компенсуючого пристрою, включеного в кінець лінії, така, що в кінці лінії реактивна потужність рівна мінус 100 Мвар (передається в лінію).

$$P_{2g} := 900 \qquad Q_{2g} := -100 \qquad S_{2g} := P_{2g} + i \cdot Q_{2g}$$

Напруга в кінці ЛЕП знайдемо з рішення системи рівнянь.

Початкові наближення для невідомих  $U_2$ ,  $I_2$ :

$$U_{2g} := 500 - i \cdot 100 \qquad I_{2g} := \frac{\overline{S_{2g}}}{U_{2g}}$$

Вирішальний блок:

Given

$$U_1 = U_{2g} \cdot \cosh(\gamma_0 \cdot L) + I_{2g} \cdot Z_c \cdot \sinh(\gamma_0 \cdot L)$$

$$I_{2g} = \frac{\overline{S_{2g}}}{U_{2g}}$$

$$\begin{pmatrix} U_{2g} \\ I_{2g} \end{pmatrix} := \text{Find}(U_{2g}, I_{2g})$$

Результати вирішення системи рівнянь (напруга і струм в кінці лінії):

$$U_{2g} = 412.797 - 270.897i \quad |U_{2g}| = 493.748$$

$$\text{angle}(\text{Re}(U_{2g}), \text{Im}(U_{2g})) - 2 \cdot \pi = -33.275 \cdot \text{deg}$$

$$I_{2g} = 1.635 - 0.831i \quad |I_{2g}| = 1.834$$

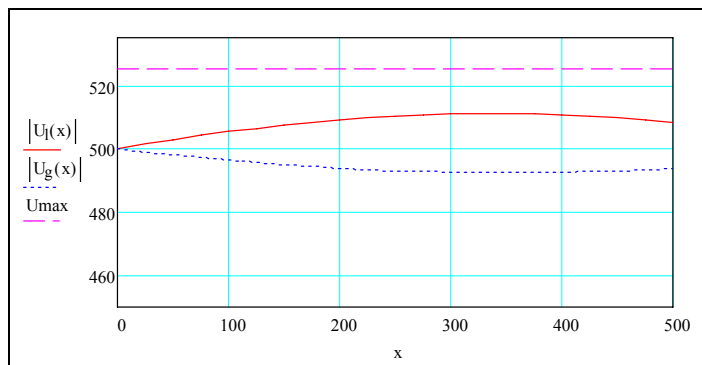
Побудуємо графіки напруги і струму уздовж лінії для обох режимів передачі потужності.

Функція напруги для  $P_2 < P_{\text{нат}}$  :

$$U_1(x) := U_{21} \cdot \cosh[\gamma_0 \cdot (L - x)] + I_{21} \cdot Z_c \cdot \sinh[\gamma_0 \cdot (L - x)]$$

Функція напруги для  $P_2 > P_{\text{нат}}$  :

$$U_g(x) := U_{2g} \cdot \cosh[\gamma_0 \cdot (L - x)] + I_{2g} \cdot Z_c \cdot \sinh[\gamma_0 \cdot (L - x)]$$



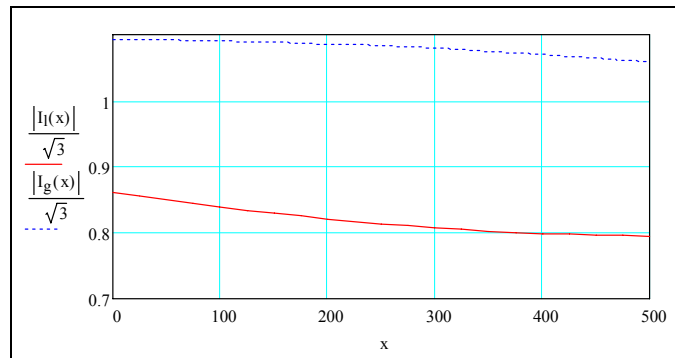
Функція струму для  $P_2 < P_{\text{нат}}$  :

$$I_1(x) := \frac{U_{21}}{Z_c} \cdot \sinh[\gamma_0 \cdot (L - x)] + I_{21} \cdot \cosh[\gamma_0 \cdot (L - x)]$$

Функція струму для  $P_2 > P_{\text{нат}}$  :

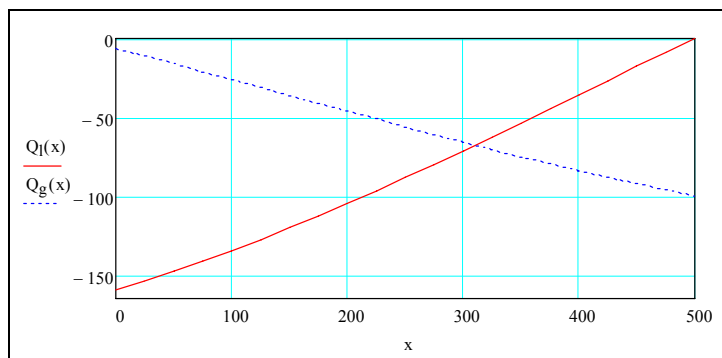


$$I_g(x) := \frac{U_{2g}}{Z_c} \cdot \sinh[\gamma_0 \cdot (L - x)] + I_{2g} \cdot \cosh[\gamma_0 \cdot (L - x)]$$



Зміна активній і реактивній потужності упродовж ЛЕП для двох режимів:

$$\begin{aligned} P_I(x) &:= \operatorname{Re}(U_I(x) \cdot \overline{I_I(x)}) & Q_I(x) &:= \operatorname{Im}(U_I(x) \cdot \overline{I_I(x)}) \\ P_g(x) &:= \operatorname{Re}(U_g(x) \cdot \overline{I_g(x)}) & Q_g(x) &:= \operatorname{Im}(U_g(x) \cdot \overline{I_g(x)}) \end{aligned}$$



Значення активної потужності на початок лінії зростають в обох випадках, оскільки уздовж лінії мають місце втрати активної потужності.

Реактивна потужність в першому випадку, коли реактивного навантаження в кінці лінії немає, передається на початок лінії (негативні значення) із-за переважання зарядної потужності над втратами реактивної потужності. У другому випадку має місце зворотна картина: втрати реактивної потужності більше зарядною і втрати компенсуються джерелом реактивної потужності в кінці лінії.

## Спрощені моделі ЛЕП

Для П-подібної схеми заміщення ЛЕП було отримано

$$\underline{Z} = \underline{Z}_C \operatorname{sh}(\underline{\gamma}_0 l), \quad (13.27)$$

$$\underline{Y}_1 = \underline{Y}_2 = \frac{1}{\underline{Z}_C} \operatorname{th} \frac{\underline{\gamma}_0 l}{2}.$$

Величини складових комплексного параметра  $\underline{\gamma}_0 = \alpha_0 + j\beta_0$  для ліній надвисокої напруги мають порядок:  $\alpha_0 - 10^{-5}$  і  $\beta_0 - 10^{-3}$ . Тому коли довжина лінії  $l$  невелика, приблизно можна прийняти:

$$\begin{aligned} \operatorname{sh}(\underline{\gamma}_0 l) &\approx \underline{\gamma}_0 l, \\ \operatorname{th} \frac{\underline{\gamma}_0 l}{2} &\approx \frac{\underline{\gamma}_0 l}{2}. \end{aligned} \quad (13.28)$$

Отже, для параметрів П-подібної схеми заміщення з математичною моделлю довгої лінії отримуємо:

$$\begin{aligned} \underline{Z} &= \sqrt{\frac{\underline{z}_0}{\underline{y}_0}} \sqrt{\underline{z}_0 \underline{y}_0} \cdot l = \underline{z}_0 l = (r_0 + jx_0)l, \\ \underline{Y}_1 = \underline{Y}_2 &= \frac{1}{\sqrt{\frac{\underline{z}_0}{\underline{y}_0}}} \frac{\sqrt{\underline{z}_0 \underline{y}_0}}{2} l = \frac{\underline{y}_0}{2} = \frac{(g_0 + jb_0)}{2} l. \end{aligned} \quad (13.29)$$

Підставимо в рівняння для П-подібної схеми заміщення (13.21) набутих значень (13.29):

$$\begin{aligned} \underline{U}_1 &= (1 + \underline{Z}\underline{Y}_2)\underline{U}_2 + \underline{Z}\underline{I}_2 = \left(1 + \frac{\underline{z}_0 l \underline{y}_0 l}{2}\right)\underline{U}_2 + \underline{z}_0 l \underline{I}_2, \\ \underline{I}_1 &= (\underline{Y}_1 + \underline{Y}_1 \underline{Z}\underline{Y}_2 + \underline{Y}_2)\underline{U}_2 + (1 + \underline{Z}\underline{Y}_1)\underline{I}_2 = \\ &= \left(\underline{y}_0 l + \frac{\underline{y}_0 l \underline{z}_0 l \underline{y}_0 l}{4}\right)\underline{U}_2 + \left(1 + \frac{\underline{z}_0 l \underline{y}_0 l}{2}\right)\underline{I}_2 \end{aligned} \quad (13.30)$$

або остаточно:

$$\begin{aligned} \underline{U}_1 &= \left(1 + \frac{\underline{z}_0 \underline{y}_0 l^2}{2}\right)\underline{U}_2 + \underline{z}_0 l \underline{I}_2, \\ \underline{I}_1 &= \underline{y}_0 l \left(1 + \frac{\underline{z}_0 \underline{y}_0 l^2}{4}\right)\underline{U}_2 + \left(1 + \frac{\underline{z}_0 \underline{y}_0 l^2}{2}\right)\underline{I}_2. \end{aligned} \quad (13.31)$$

Отримані рівняння є спрощеною математичною моделлю ЛЕП, в якій не враховується розподіленість параметрів, а зосереджені опори і провідність обчислюються по (13.29).

Для зовсім коротких ліній другий доданок у виразі  $\left(1 + \frac{\underline{z}_0 \underline{y}_0 l^2}{2}\right)$  є дуже маленьким унаслідок того, що провідність  $\underline{y}_0$  має порядок  $10^{-6} \dots 10^{-4}$ . Тоді рівняння (13.31) набувають ще більш простий вигляд:

$$\begin{aligned} \underline{U}_1 &= \underline{U}_2 + \underline{z}_0 l \underline{I}_2, \\ \underline{I}_1 &= \underline{y}_0 l \underline{U}_2 + \underline{I}_2. \end{aligned} \quad (13.32)$$

Така модель відповідає Г-подібній схемі заміщення лінії, в якій тільки одна поперечна гілка  $\underline{Y}_1 = \underline{y}_0 l$ .

Всі математичні моделі ЛЕП зручно зіставляти в табличній формі записи параметрів чотиріполюсника (Таблиця 13.1). параметрів в двох останніх моделях не враховується.

У інших випадках нехтують або опорами струмоведучих жил лінії (активним або реактивним), або ємкісною провідністю між фазами лінії.

Таблиця 13.1 – Коефіцієнти чотиріполюсника моделей ЛЕП

Модель	<u>A</u>	<u>B</u>	<u>C</u>	<u>D</u>
Рівняння довгої лінії	$\text{ch}(\underline{\gamma}_0 l)$	$\underline{Z}_C \text{sh}(\underline{\gamma}_0 l)$	$\frac{1}{\underline{Z}_C} \text{sh}(\underline{\gamma}_0 l)$	$\text{ch}(\underline{\gamma}_0 l)$
Рівняння ідеальної лінії	$\cos(\beta_0 l)$	$j \underline{Z}_C \sin(\beta_0 l)$	$j \frac{1}{\underline{Z}_C} \sin(\beta_0 l)$	$\cos(\beta_0 l)$
Модель із зосередженими параметрами П-подібної схеми заміщення	$1 + \frac{\underline{z}_0 \underline{y}_0 l^2}{2}$	$\underline{z}_0 l$	$\underline{y}_0 l \left( 1 + \frac{\underline{z}_0 \underline{y}_0 l^2}{4} \right)$	$1 + \frac{\underline{z}_0 \underline{y}_0 l^2}{2}$
Модель із зосередженими параметрами Г-подібної схеми заміщення	1	$\underline{z}_0 l$	$\underline{y}_0 l$	1

### Оцінка погрішностей двох спрощених математичних моделей ЛЕП

Виконаємо оцінку погрішностей двох спрощених математичних моделей ЛЕП – рівнянь ідеальної лінії і рівнянь для П-подібної схеми заміщення без урахування розподіленості параметрів – для конкретної ЛЕП 500 кВ. Для цього побудуємо залежності напруги на початку лінії  $U_1$  від довжини лінії при передачі потужності навантаження, близького до натуральної потужності лінії. Конструкція фази лінії: 3хАС-400/51. Розрахунки і графічні побудови виконаємо в системі Mathcad. Приведені нижче значення параметрів лінії виражені в омах, сименсах і радіанах. Параметри режиму ЛЕП дані в кіловольтах, кілоамперах, мегаватах і мегаварах.

Довжина і погонні параметри лінії:

$L := 500$	$r_0 := 0.025$	$g_0 := 0.023 \cdot 10^{-6}$	$x_0 := 0.306$	$b_0 := 3.62 \cdot 10^{-6}$
$z_0 := r_0 + j \cdot x_0$		$y_0 := g_0 + j \cdot b_0$		

Передавана потужність і напруга в кінці лінії:

$$P2 := 800 \quad Q2 := -33.5 \quad S2 := P2 + i \cdot Q2 \quad U2 := 500$$

Розрахункові параметри ЛЕП:

$$\begin{aligned} z0 &:= r0 + j \cdot x0 & y0 &:= g0 + j \cdot b0 \\ Zc &:= \sqrt{\frac{z0}{y0}} & \gamma &:= \sqrt{z0 \cdot y0} \\ Zc &= 291.016 - 10.942i & \gamma &= 4.63 \times 10^{-5} + 1.053i \times 10^{-3} \end{aligned}$$

Для ідеальної лінії:

$$\begin{aligned} ZC &:= \operatorname{Re}(Zc) & \beta &:= \operatorname{Im}(\gamma) \\ ZC &= 291.016 & \beta &= 1.053 \times 10^{-3} \end{aligned}$$

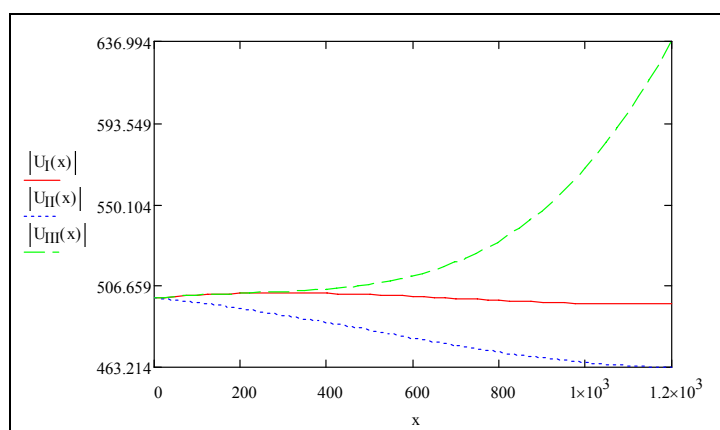
Визначимо функції напруги і струму на початку лінії для трьох моделей ЛЕП:

$$\begin{aligned} U_I(x) &:= \cosh(\gamma \cdot x) \cdot U2 + Zc \cdot \sinh(\gamma \cdot x) \cdot I2 && \text{Модель длинной линии} \\ U_{II}(x) &:= \cos(\beta \cdot x) \cdot U2 + j \cdot ZC \cdot \sin(\beta \cdot x) \cdot I2 && \text{Модель идеальной линии} \\ U_{III}(x) &:= \left(1 + \frac{z0 \cdot y0 \cdot x^2}{2}\right) \cdot U2 + z0 \cdot x \cdot I2 && \text{Модель линии без учета распределенности параметров} \end{aligned}$$

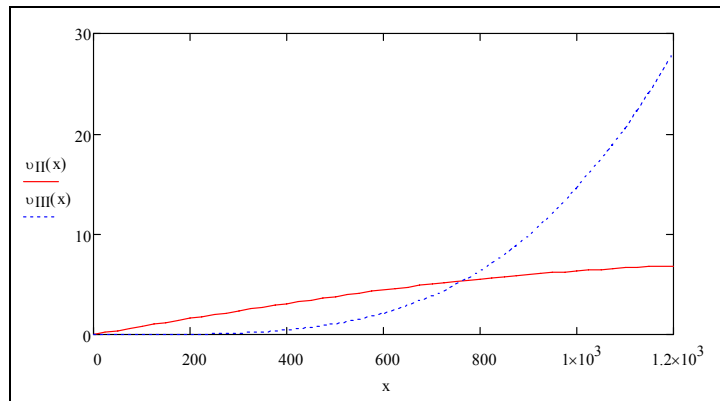
Відносні погрішності напруги на початку лінії:

$$\nu_{II}(x) := \frac{||U_{II}(x)| - |U_I(x)||}{|U_I(x)|} \cdot 100 \quad \nu_{III}(x) := \frac{||U_{III}(x)| - |U_I(x)||}{|U_I(x)|} \cdot 100$$

Графіки напруги на початку лінії:



Графіки відносних погрішностей напруги на початку лінії для спрощених математичних моделей:



З графіків погрішностей видно, що погрішність у визначенні напруги на початку лінії для моделі ідеальної лінії перевищує допустиму вже при 120 км., а по струму – при 600 км.; погрішність для моделі без урахування розподіленості параметрів допустима для ліній завдовжки до 500 км.

Аналогічні графіки погрішностей можна побудувати для вказаних моделей для струму на початку лінії.

## Контрольні питання

1. Виконання ліній електропередач
2. Перерахуєте властивості ліній електропередач
3. Математична модель ідеальної лінії
4. П-подібна схема заміщення ліній електропередач і її математичний запис
5. Графік напруги уздовж лінії в режимі холостого ходу
6. Графік струму уздовж лінії в режимі холостого ходу
7. Режим передачі потужності менше натуральною
8. Режим передачі потужності більше натуральною
9. Рівняння довгої лінії
10. Оцінка погрішностей спрощених математичних моделей

## 14. СИЛОВИЙ ТРАНСФОРМАТОР

### 14.1 Конструктивне виконання і принцип дії силового трансформатора

Трансформатором називають статичний електромагнітний пристрій, що має дві (або більш) індуктивно зв'язані обмотки і призначене для перетворення за допомогою електромагнітної індукції однієї системи змінного струму в іншу систему змінного струму. При цьому число фаз, форма кривої напруги (струму) і частота залишаються незмінними.

Силові трансформатори застосовуються в системах передачі і розподілу електроенергії; для установок з перетворювачами змінного струму в постійний (випрямлячі) або постійний в змінний (інвертори); для отримання необхідної напруги живлення у електроприймачів. Силові трансформатори встановлюються на електростанціях, на знижуючих підстанціях, в центрах живлення споживачів і безпосередньо у споживачів електричної енергії.

У електричних мережах використовуються трифазні трансформатори або групи з трьох однофазних трансформаторів. Силові трансформатори виконують двообмотковими і триобмотковими. Існують також триобмоткові автотрансформатори і двообмоткові трансформатори з розщепленою вторинною обмоткою.

Основними елементами силових трансформаторів є: магнітопровід, обмотки, ізоляція, бак, розширювач і високовольтні введення. Інші частини – це елементи системи охолодження, пристрої регулювання напруги, а також захисні і вимірювальні пристрої.

Магнітопровід є магнітною системою силового трансформатора і служить конструктивною підставою для установки і кріплення обмоток, відведень від обмоток і інших деталей (рис. 14.1). Магнітопровід виконується з електротехнічної сталі.

Обмотки є частиною електричного ланцюга і складаються з обмотувального дроту (мідного або алюмінієвого) і ізоляційних деталей. До обмоткам також відносять ввідні кінці обмоток, відгалуження для регулювання напруги і регулювальну обмотку, ємкісні кільця і електростатичні екрани ємкісного захисту від перенапружень.

Обмотки складаються з послідовно сполучених котушок, які можуть намотуватися безперервно, т. е. без паянь. Між котушками ставляться

прокладки з електрокартону. Фази обмоток однієї напруги з'єднуються між собою в зірку або трикутник.

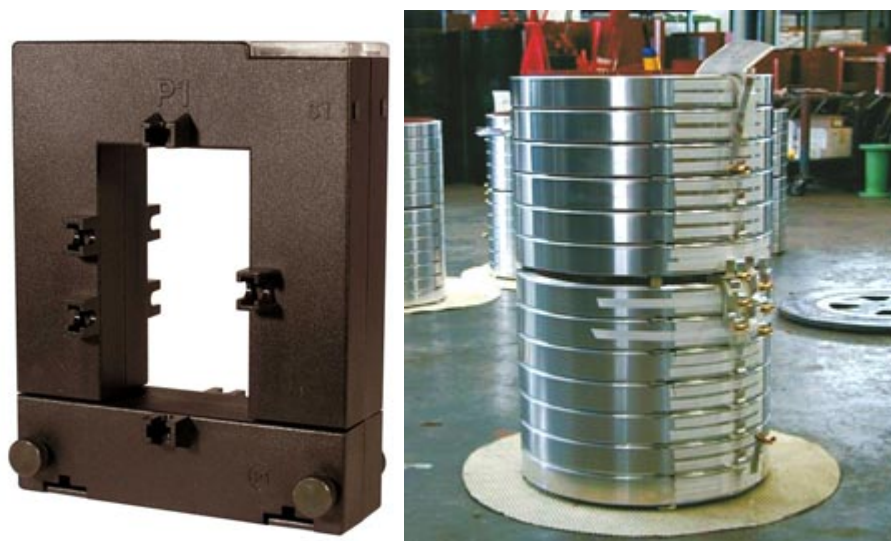


Рисунок 14.1 – Магнітопровід з обмотками силового трансформатора

У трансформаторах з масляним охолодженням магнітопровід з обмотками поміщають в бак з трансформаторним маслом (рис. 14.2). Омиваючи обмотки і магнітопровід, трансформаторне масло відбирає від них тепло і, володіючи більшою теплопровідністю, чим повітря, через стінки радіатора віддає її в навколишнє середовище.

Існують також сухі трансформатори.

Введення призначені для приєднання до збірних шин розподільних пристроїв станцій і підстанцій. Введення складається із струмопровідної частини, металевго фланця, службовця для кріплення на кришці бака, і фарфорового ізолятора.

Для компенсації температурних змін застосовується розширювач, поміщений у верхній частині бака трансформатора або окремим виносним баком (рис. 14.2).



Рисунок 14.2 – Загальний вид силового трансформатора

Принцип дії трансформатора заснований на явищі електромагнітній індукції. При підключенні первинної обмотки до джерела змінного струму з напругою  $u_1$  у витках цієї обмотки протікає змінний струм  $i_1$ , який створює в магнітопроводі змінний магнітний потік  $\Phi$ . Замикаючись на магнітопроводі, цей потік зчіплюється з обома обмотками (первинною і вторинною) і індукує в них ЕДС:

$$\begin{aligned} e_1 &= -w_1 \frac{d\Phi}{dt}, \\ e_2 &= -w_2 \frac{d\Phi}{dt}, \end{aligned} \quad (14.1)$$

де  $w_1$  і  $w_2$  – число витків в первинній і вторинній обмотках трансформатора.

При підключенні навантаження до виводів вторинної обмотки трансформатора під дією ЕДС  $e_2$  в ланцюзі цієї обмотки створюється струм  $i_2$ , а на виводах вторинної обмотки встановлюється напруга  $u_2$ .

Звідки витікає, що ЕДС  $e_1$  і  $e_2$  відрізняються один від одного числом витків обмоток, в яких вони наводяться. Тому, застосовуючи обмотки з необхідним співвідношенням витків, можна виготовити трансформатор на будь-яке відношення напруги.

Обмотку трансформатора, підключену до мережі з вищою напругою, називають обмоткою вищої напруги (ВН); обмотку, приєднану до мережі меншої напруги, – обмоткою нижчої напруги (НН).

Трансформатори володіють властивістю оборотності; один і той же трансформатор можна використовувати як підвищує і знижує. Але зазвичай



трансформатор має певне призначення: або він є таким, що підвищує, або що знижує.

Трансформатор – це апарат змінного струму. Якщо ж його первинну обмотку підключити до джерела постійного струму, то магнітний потік і магнітопроводі трансформатора також буде постійним як по величині, так і по напрямку ( $d\Phi/dt = 0$ ). Тому і в обмотках трансформатора не наводиться ЕДС.

## 14.2 Електричні і магнітні властивості і параметри силового трансформатора

Основними електричними елементами силового трансформатора є обмотки, що мають електричний опір. Струм, протікаючи по цих обмотках, викликає їх нагрів. Потоки розсіювання обмоток обумовлюють власні індуктивності обмоток. Отже, в обмотках трансформатора, по яких протікають струми, є активні і індуктивні опори.

Процес намагнічування активної сталі магнітопроводу характеризується кривою намагнічення  $\mathbf{B} = \mathbf{f}(\mathbf{H})$ . Ця залежність є нелінійною: на кривій є ділянка, після якої подальше зростання напруженості магнітного поля практично не приводить до збільшення індукції в сталі. Ця зона характеризує насичення електротехнічної сталі. Відношення індукції до напруженості поля в будь-якій точці кривої намагнічення називають магнітною проникністю ( $\mu$ ), яка характеризує здібність матеріалу до намагнічення. Залежність магнітної проникності електротехнічної сталі від індукції є також нелінійною.

Унаслідок безперервної зміни величини і напрямку струму, що намагнічує, протікає в первинній обмотці трансформатора, в магнітопроводі створюється змінний магнітний потік, зміна якого приводить до перемагнічування електротехнічної сталі.

Електрична енергія, витрачена на перемагнічування, перетвориться в теплову енергію, що приводить до нагріву магнітопроводу трансформатора.

Втрати в активній частині магнітопроводу обумовлюються природою процесів намагнічення феромагнітних матеріалів і складаються з трьох частин: втрат на гістерезис ( $P_H$ ), втрат на вихрові струми ( $P_B$ ) і втрат на магнітну післядію ( $P_n$ )

Втрати на гістерезис при перемагнічуванні викликаються витратою енергії на перебудову меж доменів, і напрями їх мимовільній намагніченості в електротехнічній сталі залежать від її мікроструктури і параметрів зовнішнього магнітного поля.

Втрати на вихрові струми викликаються витратою енергії на нагрів активної сталі від вихрових струмів, що наводяться в ній змінним магнітним потоком. Вихрові струми циркулюють в листах в площинах, перпендикулярних напрямку магнітного потоку, т. е. у площинах поперечного перетину магнітопроводу.

Величина втрат на вихрові струми пропорційна квадрату товщини і назад пропорційна питомому електричному опору активного матеріалу, тому для зменшення втрат на вихрові струми магнітопровід набирається з тонких, ізольованих один від одного шарів, товщина яких в основному визначається товщиною електротехнічної сталі. Шари магнітопроводу виконуються з окремих пластин або стрічок.

Зміряні втрати в сталі завжди більші, ніж розрахункова сума втрат на гістерезис і на вихрові струми, за рахунок наявності втрат на магнітну післядію або, як їх іноді називають, «додаткових» втрат. Природа цих втрат в даний час недостатньо ясна, і вони не піддаються аналітичному розрахунку. Збільшення загальних втрат в сталі магнітопроводу може бути викликане також за рахунок механічних дій на неї при технологічній обробці і недосконалості міжлистової ізоляції. Крім того, потоки розсіювання обмоток частково замикаються через бак і інші сталеві елементи трансформатора, що викликає додаткові втрати на перемагнічування і вихрових струмах. Для зниження цих втрат сталеві баки трансформатора екранують пакетами електротехнічної сталі або пластинами з немагнітних матеріалів (міді, алюмінію).

Струм намагнічення і струм, що викликає втрати в сталі трансформатора, також протікає по первинній обмотці. Унаслідок нелінійності характеристики намагнічення струм намагнічення не є синусоїдальним – залежність струму намагнічення від часу є періодичною функцією, але з декілька витягнутою по відношенню до функції синуса формою кривої. Оскільки струм навантаження зазвичай в десятки разів більше струму намагнічення, то сумарний струм (намагнічення і навантаження) первинної обмотки є практично синусоїдальним. У режимах роботи трансформатора, близьких до холостого ходу, слід вважатися з несинусоїдальністю струму трансформатора. Несинусоїдальність струму трансформатора сильно збільшується при зростанні струму намагнічення, що відбувається при перевищенні напруги, поданої на трансформатор.

### 14.3 Математичні моделі силового трансформатора

Розглянемо математичні моделі силових трансформаторів, які застосовуються в завданнях, пов'язаних з розрахунком сталих режимів схем електричних мереж. У таких моделях не враховуються ємкісні зв'язки між витками кожній з обмоток, між самими обмотками і обмотками і землею, а також розподіленість електричних і магнітних параметрів. Крім того, обмежимося розглядом симетричних режимів навантаження трансформаторів.

Отримаємо математичну модель однофазного двообмоткового трансформатора. Спочатку припустимо, що трансформатор не має магнітопроводу (повітряний трансформатор), тоді він може бути представлений схемою (рис. 14.3), в якій активні опори обмоток зображені окремо. Полярності обмоток на схемі відмічені зірочками.

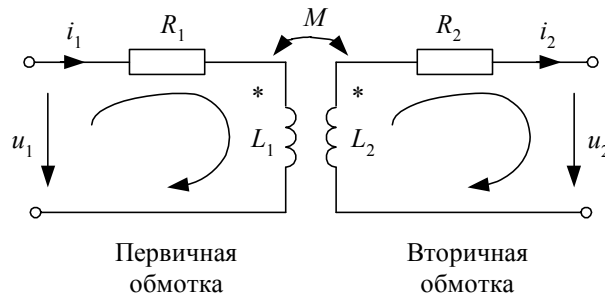


Рисунок 14.3 – Схема трансформатора без магнітопроводу

При обході контурів на схемі (рис. 14.3) відповідно до заданих напрямів по другому закону Кірхгофа отримаємо рівняння трансформатора в диференціальній формі:

$$\begin{aligned} u_1 &= R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt}, \\ -u_2 &= R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} - M \frac{di_1}{dt}. \end{aligned} \quad (14.2)$$

Оскільки напрями струмів на схемі орієнтовані не однаково по відношенню до зірочок, то полярність  $M \frac{di_1}{dt}$  не співпадає з  $i_2$  і, навпаки, полярність  $M \frac{di_2}{dt}$  не співпадає з  $i_1$ .

При синусоїдальних струмах і напрузі рівняння (14.2) у комплексній формі записуються таким чином:

$$\begin{aligned} \underline{U}_1 &= R_1 \underline{I}_1 + j\omega L_1 \underline{I}_1 - j\omega M \underline{I}_2, \\ -\underline{U}_2 &= R_2 \underline{I}_2 + j\omega L_2 \underline{I}_2 - j\omega M \underline{I}_1. \end{aligned} \quad (14.3)$$

Ці рівняння рівносильні наступним:

$$\begin{aligned} \underline{U}_1 &= R_1 \underline{I}_1 + j\omega(L_1 - M)\underline{I}_1 + j\omega M(\underline{I}_1 - \underline{I}_2), \\ -\underline{U}_2 &= R_2 \underline{I}_2 + j\omega(L_2 - M)\underline{I}_2 - j\omega M(\underline{I}_1 - \underline{I}_2). \end{aligned} \quad (14.4)$$

Останнім рівнянням відповідає схема заміщення (рис. 14.4). На відміну від (рис. 14.3) у схемі заміщення первинний і вторинний ланцюги трансформатора зв'язані не індуктивно, а гальванічно.

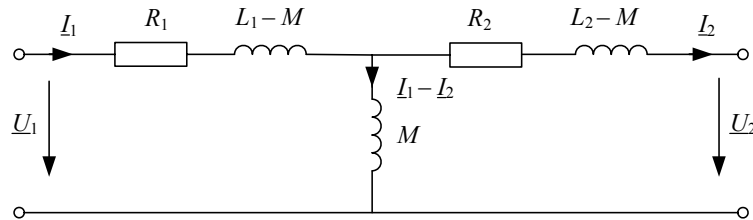


Рисунок 14.4 – Схема заміщення трансформатора без магнітопроводу

Що входять в схему (рис. 14.4) різниці  $L_1 - M$  і  $L_2 - M$  мають фізичний сенс тільки при однаковому числі витків первинної  $w_1$  і вторинною  $w_2$  обмоток ( $w_1 = w_2$ ). В цьому випадку вони є індуктивності розсіяння  $L_{s1}$  і  $L_{s2}$  первинної і вторинної обмоток трансформатора.

У реальних трансформаторах для моделювання втрат в сталі в схему заміщення трансформатора вводять активну провідність  $G_\mu$ . Для моделювання ефекту намагнічення сердечника вводять реактивну провідність  $B_\mu$ .

Якщо узяти за основу математичної моделі трансформатора так званий ідеальний трансформатор з коефіцієнтом трансформації  $n = \frac{w_1}{w_2}$ , для якого відносна магнітна проникність рівна нескінченності і струм намагнічення рівний нулю, то додаванням до нього елементів, що враховують основні паразитні ефекти, можна отримати повну схему заміщення трансформатора (рис. 14.5).

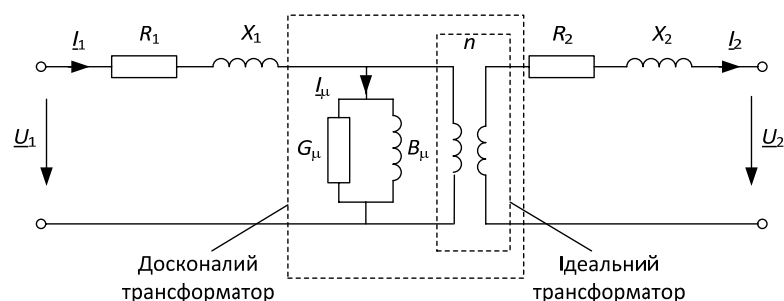


Рисунок 14.5 – Повна T-подібна схема заміщення трансформатора

Втрати енергії в обмотках трансформатора при протіканні по ним струмів враховуються активними опорами  $R_1$  і  $R_2$ , послідовно з ними включене

індуктивності розсіяння, яке враховує ефект запасання енергії і наведення напруги в обмотках від потоків розсіяння. Цими індуктивностям відповідають індуктивні опори обмоток  $X_1$  і  $X_2$ . Струм намагнічення обумовлює силу, що намагнічує, яка створює потік взаємної індукції. Величина струму намагнічення  $I_\mu$  пропорційна напрузі первинної обмотки. Паралельно індуктивній провідності намагнічення  $B_\mu$  включають активну провідність  $G_\mu$ , що враховує втрати в сердечнику.

Таким чином, **ідеальним трансформатором** є трансформатор, для якого за будь-яких умов  $\frac{U_1}{U_2} = \frac{I_2}{I_1} = n$ .

Трансформатор, для якого при будь-якому навантаженні  $\frac{U_1}{U_2} = n$ , називається *досконалим трансформатором* (рис. 14.5).

У багатьох випадках користуються приведеною Т-подібною схемою заміщення трансформатора (рис. 14.6). Виходить вона приведенням опорів вторинної обмотки до напруги первинної обмотки по співвідношеннях:

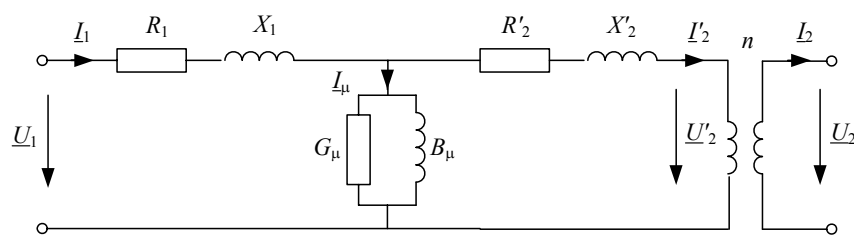


Рисунок 14.6 – Приведена Т-подібна схема заміщення трансформатора

На схемі (рис. 14.6) відмічені струм і напруга:

$$\underline{U}'_2 = n\underline{U}_2, \quad \underline{I}'_2 = \frac{1}{n}\underline{I}_2. \quad (14.5)$$

#### 14.4 Г-подібна і П-подібна схеми заміщення силового трансформатора

Зазвичай для силових трансформаторів доцільніша так звана Г-подібна схема заміщення, елементи якої мають простій фізичний сенс і можуть бути обчислені або зміряні. Виходить вона таким чином.

Гілка намагнічення переноситься на затиски первинної обмотки і виявляється включеною на напругу  $U_1$ . Це вносить погрішність до математичної моделі, оскільки насправді струм намагнічення (струм холостого ходу) протікає по первинній обмотці. Зазвичай струм холостого ходу силових трансформаторів менше одного відсотка від номінального струму

трансформатора, і таке спрощення вважається допустимим. Опори первинної обмотки виявляються послідовно включеними з приведеними опором вторинної обмотки, і при їх складанні виходять так звані опори трансформатора  $R_T$  і  $X_T$  (рис. 14.7):

$$R_T = R_1 + R'_2, \quad X_T = X_1 + X'_2.$$

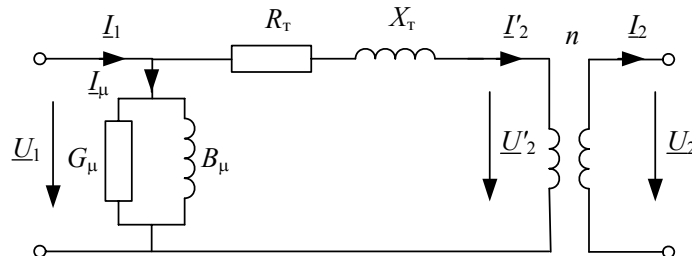


Рисунок 14.7 – Г-подібна схема заміщення трансформатора

Отримана схема носить назву Г-подібної схеми заміщення трансформатора і застосовується для виконання розрахунків схем електричних мереж, де вона ще більше спрощується за допомогою представлення гілки холостого ходу у вигляді постійних величин втрат активної і реактивної потужності на холостий хід (рис. 14.8).

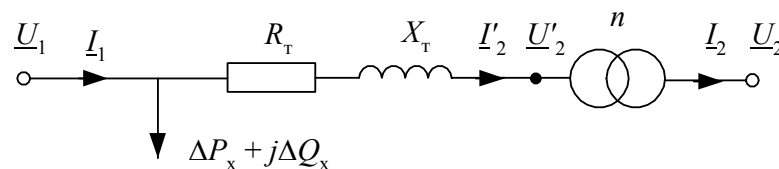


Рисунок 14.8 – Спрощена Г-подібна схема заміщення трансформатора

Все отримане вище для однофазних трансформаторів можна розповсюдити на кожен фазу трифазного трансформатора.

Опори і провідність Г-подібної схеми заміщення трансформатора, приведені до напруги обмотки первинної напруги, визначаються по формулах:

$$R_T = \frac{P_K U_{\text{НОМ}}^2}{S_{\text{НОМ}}^2}; \quad X_T = \frac{U_K U_{\text{НОМ}}^2}{100 S_{\text{НОМ}}}; \quad (14.6)$$

$$G_\mu = \frac{P_x}{U_{\text{НОМ}}^2}; \quad B_\mu = \frac{I_x S_{\text{НОМ}}}{100 U_{\text{НОМ}}^2} = \frac{Q_x}{U_{\text{НОМ}}^2}.$$

Моделювання елементів схем електричних мереж при використанні спеціальних програм для розрахунку їх режимів роботи зручно виконувати по

П-подібних схемах заміщення. Таку схему заміщення можна отримати і для трансформатора.

Отримаємо параметри П-подібної схеми заміщення на основі Г-подібної схеми заміщення двообмоточного знижувального трансформатора з коефіцієнтом трансформації  $n > 1$  (рис. 14.7).

Знайдемо напругу і струм первинної обмотки:

$$\underline{U}_1 = n\underline{U}_2 + \Delta\underline{U}_T = n\underline{U}_2 + (R_T + jX_T) \frac{I_2}{n}, \quad (14.7)$$

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_\mu + \frac{I_2}{n} = (G_\mu - jB_\mu) \underline{U}_1 + \frac{I_2}{n}. \quad (14.8)$$

Після підстановки (14.7) в (14.8) отримаємо

$$\underline{I}_1 = n(G_\mu - jB_\mu) \underline{U}_2 + \frac{1}{n}((R_T + jX_T)(G_\mu - jB_\mu) + 1) I_2. \quad (14.9)$$

Зіставляючи вирази (14.7) і (14.9) з рівняннями чотириполюсника

$$\begin{aligned} \underline{U}_1 &= \underline{A}\underline{U}_2 + \underline{B}I_2, \\ \underline{I}_1 &= \underline{C}\underline{U}_2 + \underline{D}I_2 \end{aligned} \quad (14.10)$$

і враховуючи співвідношення між коефіцієнтами чотириполюсника і параметрами П-подібної схеми заміщення матимемо:

$$\begin{aligned} \underline{A} &= 1 + \underline{Z}\underline{Y}_2 = n, \\ \underline{B} &= \underline{Z} = \frac{\underline{Z}_T}{n}, \\ \underline{C} &= \underline{Y}_1 + \underline{Y}_1 \underline{Z}\underline{Y}_2 + \underline{Y}_2 = n\underline{Y}_\mu, \\ \underline{D} &= 1 + \underline{Z}\underline{Y}_1 = \frac{1}{n}(1 + \underline{Z}_T \underline{Y}_\mu). \end{aligned} \quad (14.11)$$

З отриманих співвідношень можна знайти параметри П-подібної схеми заміщення трансформатора:

$$\begin{aligned} \underline{Z} &= \frac{1}{\underline{Z}_T}, \\ \underline{Y}_1 &= \frac{1}{\underline{Z}_T}(1 - n) + \underline{Y}_\mu, \\ \underline{Y}_2 &= \frac{n}{\underline{Z}_T}(n - 1). \end{aligned} \quad (14.12)$$

П-подібна схема заміщення трансформатора на відміну від П-подібної схеми заміщення ЛЕП є несиметричною, т. е.  $\underline{Y}_1 \neq \underline{Y}_2$ .

## 14.5 Побудова зовнішньої характеристики трансформатора

Зовнішньою характеристикою трансформатора називають залежність зміни вторинної напруги  $U_2$  від струму навантаження  $I_2$  при постійному коефіцієнті потужності приймача  $\cos \varphi = \text{const}$  і номінальній первинній напрузі  $U_1 = U_{\text{ном}}$ . Зіставляючи зовнішні характеристики, отримані для різних математичних моделей трансформатора, з експериментально знайденою характеристикою трансформатора, можна оцінити величину погрішності різних моделей і визначити, таким чином, область їх використання.

Побудуємо зовнішню характеристику силового трансформатора по його математичній моделі при зміні струму вторинної обмотки від нуля до  $I_{\text{ном}}$  для трьох різних коефіцієнтів потужності: 0,8; 0,9 і 1,0.

Зовнішню характеристику  $U_2 = f(I_2)$  побудуємо по рівнянню

$$\underline{U}_1 = A\underline{U}_2 + \sqrt{3}B\underline{I}_2. \quad (14.13)$$

Приймемо  $\underline{U}_1 = U_1 = \text{const}$  (сумістимо з речовою віссю), тоді векторна діаграма струмів і напруги трансформатора матиме вигляд, як на рисунку 14.9.

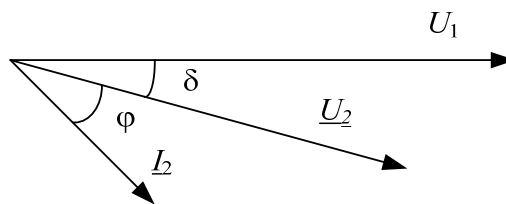


Рисунок 14.9 – Векторна діаграма струмів і напруги 1

Виразимо з (14.13) напругу  $\underline{U}_2$ :

$$\underline{U}_2 = \frac{U_1 - \sqrt{3}B\underline{I}_2}{A}. \quad (14.14)$$

Тут струм  $\underline{I}_2$  має кут зрушення щодо речової осі –  $(\delta + \varphi)$ , а напруга вторинної обмотки представлена в комплексному вигляді:  $|\underline{U}_2|$  і  $\delta$ , де  $\delta$  входить в ліву частину рівняння:  $\underline{U}_2 = U_2 e^{-j\delta}$  і в праву:  $\underline{I}_2 = I_2 e^{-j(\varphi + \delta)}$ .

Щоб отримати залежність величини (модуля)  $U_2$  від величини (модуля)  $I_2$ , необхідно перейти до рівнянь з речовими змінними. Для зручності приймемо суміщеним з дійсною віссю вектор  $\underline{U}_2$ , тоді векторна діаграма струмів і напруги прийме вигляд, показаний на рисунку 14.10.



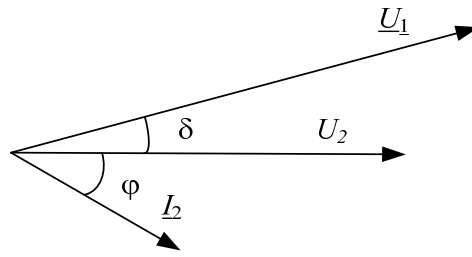


Рисунок 14.10 – Векторна діаграма струмів і напруги 2

Тоді напруга  $U_2$ :

$$U_2 = \frac{U_1 - \sqrt{3}BI_2}{A}, \quad (14.15)$$

де  $\underline{U}_1 = U_1 e^{j\delta}$ ;  $\underline{I}_2 = I_2 e^{-j\varphi}$ .

Розділимо рівняння (2.48) на два рівняння з речовими змінними. З урахуванням  $\underline{A} = A = n$  і  $\underline{B} = B' + jB''$  матимемо систему рівнянь:

$$\begin{aligned} U_2 &= \frac{1}{A} [U_1' - \sqrt{3}(B'I_2' + B''I_2'')], \\ 0 &= \frac{1}{A} [U_1'' - \sqrt{3}(B''I_2' - B'I_2'')]. \end{aligned} \quad (14.16)$$

Оскільки  $I_2' = I_2 \cos \varphi$ ,  $I_2'' = I_2 \sin \varphi$  і  $U_1 = \sqrt{U_1'^2 + U_1''^2}$ , то отримуємо систему рівнянь:

$$\begin{aligned} U_2 &= \frac{1}{A} [U_1' - \sqrt{3}(B'I_2 \cos \varphi + B''I_2 \sin \varphi)], \\ 0 &= \frac{1}{A} [U_1'' - \sqrt{3}(B''I_2 \cos \varphi - B'I_2 \sin \varphi)], \\ U_1^2 &= U_1'^2 + U_1''^2 \end{aligned} \quad (14.17)$$

з невідомими  $U_2$ ,  $U_1'$  і  $U_1''$ .

Змінюючи струм  $I_2$  в межах від нуля до  $I_{2\text{ном}}$ , шукатимемо вирішення системи рівнянь (14.16) для кожного значення  $I_2$  і будуватимемо залежність  $U_2 = f(I_2)$ .

У Mathcad є можливість визначення функції як вирішення системи рівнянь. Для цього вираз з Find має вид визначення функції:  $f(x) := \text{Find}(x)$  і далі в документі Mathcad  $f(x)$  стає визначеною і є функцією аргументу  $x$ .

У нашому випадку аргументами функції з Find буде  $U_2$  (по умові з кутом рівним нулю) і  $\cos \varphi$ , який також буде різним для різних вихідних характеристик.

**Приклад 1.** Визначимо функцію як вирішення системи рівнянь.

Для зручності запису введемо ще дві змінні  $I_2' = I_2 \cos \varphi$  і  $I_2'' = I_2 \sin \varphi$ .

Початкові наближення:

$$U_2 := \frac{U_1}{n} \quad U'_1 := U_1 \quad U''_1 := 0 \quad I'_2 := 0 \quad I''_2 := 0$$

Вирішальний блок Mathcad:

$$\begin{aligned} &\text{Given} \\ U_2 &= \frac{U'_1}{A} - \sqrt{3} \cdot \frac{(\text{Re}(B) \cdot I'_2 + \text{Im}(B) \cdot I''_2)}{A} \\ 0 &= U''_1 - \sqrt{3} \cdot (\text{Im}(B) \cdot I'_2 - \text{Re}(B) \cdot I''_2) \\ U_1^2 &= U'_1{}^2 + U''_1{}^2 \\ I'_2 &= I \cdot \cos f \\ I''_2 &= I \cdot \sqrt{1 - \cos^2 f} \end{aligned}$$

Функція як вирішення системи рівнянь:

$$F(I, \cos f) := \text{Find}(U_2, U'_1, U''_1, I'_2, I''_2)$$

Тут функція **F** є вектор-функцією, т. е. містить п'ять елементів (по числу невідомих). Перший елемент дає функцію **U<sub>2</sub>**, другий, – **U'<sub>1</sub>** і т. д. Нас цікавить тільки перший елемент: функція **U<sub>2</sub>** от **I<sub>2</sub>** і **cos φ**. Якщо змінна **ORIGIN** в Mathcad має задане за умовчанням значення 0, то наша функція використовуватиметься у вигляді **F(I<sub>2</sub>, cosφ)<sub>0</sub>**. Так, наприклад, для **cos φ = 0,8** вихідна характеристика будуватиметься по функції **F(I<sub>2</sub>, 0.8)<sub>0</sub>** при зміні струму від 0 до **I<sub>ном</sub>**.

**Приклад 2.** Побудуємо зовнішню характеристику силового трансформатора ТРДЦН-63000/110 по його математичній моделі – Г-подібній схемі заміщення.

Розрахунки і побудову характеристики виконаємо в Mathcad. Напряга в кіловольтах, потужності в кіловольт-амперах, струми в кілоамперах, опори в омах, провідності в сименсах.

Параметри трансформатора:

$$\begin{aligned} U_{1\text{ном}} &:= 115 & U_{2\text{ном}} &:= 10.5 & S_{\text{ном}} &:= 63000 & P_x &:= 59.0 & Q_x &:= 410 \\ R &:= 0.8 & X &:= 22 \end{aligned}$$

Номинальний струм, коефіцієнт трансформації і параметри галузь намагнічення:

$$I_{2nom} := \frac{S_{nom}}{\sqrt{3} \cdot U_{2nom}} \cdot 10^{-3} \quad n := \frac{U_{1nom}}{U_{2nom}} \quad G_{\mu} := \frac{P_x}{U_{1nom}^2} \cdot 10^{-3} \quad B_{\mu} := \frac{Q_x}{U_{1nom}^2} \cdot 10^{-3}$$

$$I_{2nom} = 3.464 \quad n = 10.952 \quad G_{\mu} = 4.461 \times 10^{-6} \quad B_{\mu} = 3.1 \times 10^{-5}$$

Коефіцієнти  $A$  і  $B$  чотириполюсника:

$$A := n \quad B := \frac{R + j \cdot X}{n} \quad B = 0.073 + 2.009i$$

Умови побудови характеристики:

$$U_1 := U_{1nom} \quad I := 0, 0.1 \cdot I_{2nom} \dots I_{2nom}$$

Початкові наближення:

$$U_2 := \frac{U_1}{n} \quad U'_1 := U_1 \quad U''_1 := 0 \quad I'_2 := 0 \quad I''_2 := 0$$

Вирішальний блок Mathcad:

Given

$$U_2 = \frac{U'_1}{A} - \sqrt{3} \cdot \frac{(\text{Re}(B) \cdot I'_2 + \text{Im}(B) \cdot I''_2)}{A}$$

$$0 = U''_1 - \sqrt{3} \cdot (\text{Im}(B) \cdot I'_2 - \text{Re}(B) \cdot I''_2)$$

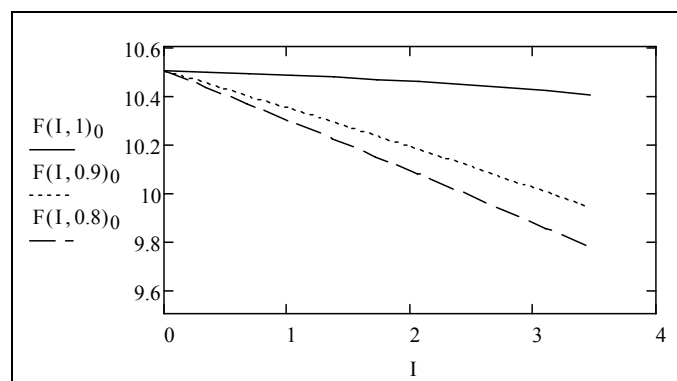
$$U_1^2 = U'_1{}^2 + U''_1{}^2$$

$$I'_2 = I \cdot \text{cosf}$$

$$I''_2 = I \cdot \sqrt{1 - \text{cosf}^2}$$

$$F(I, \text{cosf}) := \text{Find}(U_2, U'_1, U''_1, I'_2, I''_2)$$

Зовнішні характеристики для трьох значень коефіцієнта потужності: 1; 0,9 і 0,8:



Зниження напруги на вторинній обмотці із зростанням струму навантаження викликане втратою напруги в опорах обмоток трансформатора. Для того, щоб не допустити зниження напруги у споживачів електроенергії, в силових трансформаторах передбачений спеціальний пристрій – регулятор

напруги, який при зростанні струму навантаження змінює коефіцієнт трансформації так, щоб забезпечити необхідну напругу на шинах вторинної напруги трансформатора.

Отримаємо зовнішню характеристику трансформатора по його спрощеній моделі, в якій не враховуються активні параметри:  $R_T = 0$  і  $G_\mu = 0$ , і зіставимо отримані характеристики з характеристиками, отриманими по повній моделі.

Коефіцієнти  $A$  і  $B$  чотиріполюсника для спрощеної моделі:

$$A := n \quad B := \frac{j \cdot X}{n} \quad B = 2.009i$$

Початкові наближення:

$$U_2 := \frac{U_1}{n} \quad U'_1 := U_1 \quad U''_1 := 0 \quad I'_2 := 0 \quad I''_2 := 0$$

Вирішальний блок Mathcad:

$$U_2 = \frac{U'_1}{A} - \sqrt{3} \cdot \frac{(\operatorname{Re}(B) \cdot I'_2 + \operatorname{Im}(B) \cdot I''_2)}{A}$$

$$0 = U''_1 - \sqrt{3} \cdot (\operatorname{Im}(B) \cdot I'_2 - \operatorname{Re}(B) \cdot I''_2)$$

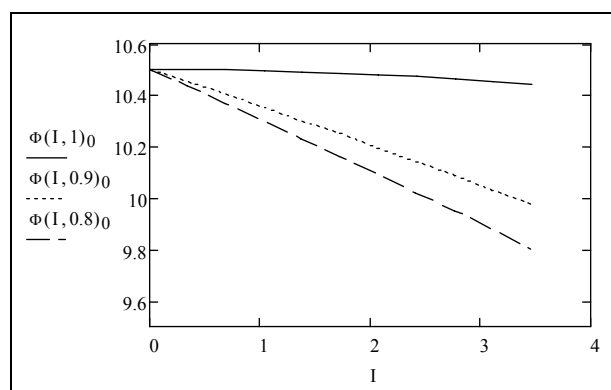
$$U_1^2 = U'_1{}^2 + U''_1{}^2$$

$$I'_2 = I \cdot \operatorname{cosf}$$

$$I''_2 = I \cdot \sqrt{1 - \operatorname{cosf}^2}$$

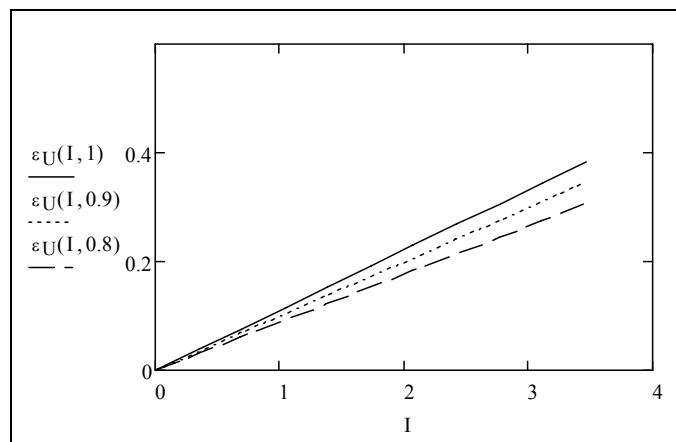
$$\Phi(I, \operatorname{cosf}) := \operatorname{Find}(U_2, U'_1, U''_1, I'_2, I''_2)$$

Зовнішні характеристики для трьох значень коефіцієнта потужності: 1; 0,9 і 0,8:



Обчислимо і побудуємо функції погрішностей зовнішніх характеристик спрощеної моделі:

$$\varepsilon_U(I, \cos\varphi) := \frac{|F(I, \cos\varphi)_0 - \Phi(I, \cos\varphi)_0|}{|F(I, \cos\varphi)_0|} \cdot 100$$



З останнього малюнка видно, що погрішності характеристик спрощеної моделі не перевищують 0,4 %. Така погрішність цілком допустима в багатьох завданнях розрахунку сталих режимів і струмів короткого замикання в електричних системах і тому іноді активним опором обмоток трансформатора і втратами в сталі нехтують. Слідуює, проте, відмітити, що для трансформаторів малої потужності така картина не зберігається і застосування спрощеної моделі стає більш обмеженим.

### Контрольні питання

1. Поясніть фізичний сенс параметрів схеми заміщення трансформатора.
2. Запишіть рівняння трансформатора в диференціальній формі запису.
3. Який трансформатор називається ідеальним і досконалим?
4. Намалюйте Г-подібну схему заміщення трансформатора.
5. Як визначаються параметри П-подібної схеми заміщення трансформатора?
6. Як побудувати зовнішню характеристику трансформатора?

## 15. ЕЛЕКТРИЧНЕ НАВАНТАЖЕННЯ

### 15.1 Статичні характеристики електричного навантаження

Процес споживання електричної енергії ототожнюється з поняттям електричного навантаження, яке характеризується потужністю і енергією. Навантаженням може бути один електроприймач, група однотипних електроприймачів або сукупність різних електроприймачів – змішане навантаження.

До основних електроприймачів в електричній системі відносяться:

- асинхронні двигуни
- синхронні двигуни
- лампи розжарювання
- люмінесцентні лампи
- печі опору
- дугові печі.

Існує також велике число пристроїв і побутових приладів, в яких поєднуються різні за типом електроприймачі.

У завданнях аналізу сталих режимів електричних систем необхідна величина активної і реактивної потужності навантаження. Фізична природа споживання енергії електричним навантаженням така, що її активна і реактивна потужності залежать від підведеної напруги і частоти в електричній системі. Такі залежності носять назву статичних характеристик навантажень по частоті і по напрузі. Різні типи електричних навантажень мають різні статичні характеристики. В сукупності різних типів електроприймачів розглядаються статичні характеристики змішаного навантаження.

Статичні характеристики використовуються при регулюванні частоти і напруги в ЕЕС. Загалом вони записуються як  $P = \varphi(f, U)$ ,  $Q = \psi(f, U)$ .

Тут ми розглядатимемо залежності потужності навантаження тільки від напруги – статичні характеристики навантаження по напрузі  $P(U)$  і  $Q(U)$ . При цьому рахуватимемо частоту в ЕЕС незмінною величиною. По статичних характеристиках, побудованих у відносних номінальних одиницях, можуть бути визначені регулюючі ефекти навантаження – як похідні  $\frac{\partial P}{\partial U}$ ,  $\frac{\partial Q}{\partial U}$  у якій-небудь робочій точці характеристики, наприклад при  $U = U_{\text{ном}}$ .

Регулюючий ефект показує ступінь зниження активного і реактивного навантаження при зміні напруги. Чим більше регулюючий ефект, тим сильніше

змінюється потужність, споживана навантаженням при зміні напруги або частоти.

Для різних електроприймачів і їх поєднань статичні характеристики виходять різними і залежними від їх робочих режимів. Практично доводиться користуватися статичними характеристиками, отриманими експериментально. В деяких випадках їх вдається отримати розрахунковим шляхом.

Статичні характеристики зображують в координатах відносних величин – активній і реактивній потужності від частоти і напруги (рис. 15.1).

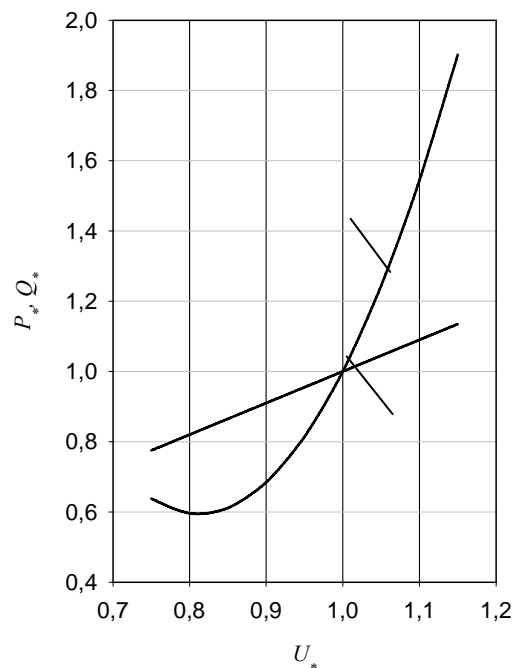


Рисунок 15.1 – Середні статичні навантаження по напрузі для змішаного навантаження

На рисунку 15.1 відносна величина напруги  $U_* = U / U_{\text{ном}}$ , а відносні потужності визначаються по відношенню до номінальної або який або вибраній величині потужності навантаження:  $P_* = P / P_{\text{ном}}$ ,  $Q_* = Q / Q_{\text{ном}}$ .

Слід зазначити, що в ЕЕС і конкретно у споживачів встановлюються спеціальні автоматичні регулюючі пристрої, які компенсують зміну напруги на електроприймачах, що значною мірою знижує регулюючі ефекти навантаження. У простому випадку це стабілізатори напруги, а у високовольтних мережах – могутні регульовані компенсуючі пристрої реактивної потужності і регулятори напруги силових трансформаторів. Розглянемо статичні характеристики окремих видів навантаження.

## **Асинхронні двигуни**

Принцип дії асинхронного двигуна заснований на явищі електромагнітній індукції. У нерухому трифазну обмотку статора асинхронного двигуна подається змінний струм, який формує в статорі магнітне поле, що обертається. Це поле перетинає провідники замкнутої обмотки ротора і наводить в них ЕДС, під дією яких з обмотки ротора протікатиме струм. Взаємодія цього струму з полем статора створює на провідниках обмотки ротора електромагнітні сили – момент, що обертає, напрям якого визначається за правилом «лівої руки». Ці сили захоплюють ротор у бік обертання магнітного потоку. Швидкість обертання ротора завжди менше швидкості обертання магнітного поля статора. Якщо припустити, що в якийсь момент часу частота обертання ротора опинилася рівній частоті обертання поля статора, то провідники обмотки ротора не перетинатимуть магнітне поле статора і струму в роторі не буде. Момент, що в цьому випадку обертає, стане рівним нулю, і частота обертання ротора зменшиться в порівнянні з частотою обертання поля статора, поки не виникне момент, що обертає, врівноважує момент навантаження на валу двигуна і момент сил тертя в підшипниках.

Асинхронні двигуни мають різні статичні характеристики. Активна потужність двигунів значною мірою залежить від характеристик машин, що приводяться в обертання двигунами. Реактивна потужність має різну залежність від напруги, обумовлену номінальною потужністю двигуна. Малопотужні двигуни мають крутіші характеристики в порівнянні з могутніми двигунами.

Реактивна потужність, споживана асинхронними двигунами, складається з потужності, що намагнічує, пов'язаної із струмом, що намагнічує, і потужності розсіяння, пов'язаної із створенням полей розсіяння в статорі і роторі. При зниженні напруги реактивна потужність розсіяння росте, а потужність, що намагнічує, знижується. Сумарна потужність спочатку знижується, а потім знов починає рости. При певній нарузі, званій критичним, двигун зупиняється і його подальша робота ставати неможливою.

## **Синхронні двигуни**

Магнітне поле статора синхронної машини, що обертається, захоплює за собою ротор, який є електромагнітом-індуктором. Різнойменні полюси магнітного поля статора і ротора притягуються, і ротор обертається з постійною швидкістю. Для того, щоб ротор став електромагнітом, на нього подається постійний струм – струм збудження. Цей струм при обертанні ротора викликає магнітне поле в статорі – реакцію якоря. Залежно від величини струму



збудження синхронний двигун може працювати в режимі перезбудження або недозбудження. Режим перезбудження – це нормальний режим роботи двигуна. Могутні синхронні двигуни виготовляють з номінальним коефіцієнтом потужності 0,9 і 0,8 при роботі з перезбудженням.

У режимі перезбудження синхронний двигун видає реактивну потужність, т. е. має ємкісний характер реактивної потужності по відношенню до мережі. При недозбудженні синхронний двигун має реактивну потужність індуктивного характеру, але унаслідок обмежень по стійкості роботи і перегріву лобових частин машини максимально можлива споживана реактивна потужність не перевищує 30 % від номінальної реактивної потужності при перезбудженні.

Синхронні двигуни використовуються як джерела реактивної потужності в ЕЕС і застосовуються для регулювання напруги. Струм збудження синхронних машин змінюється відповідно до закону регулювання напруги в мережі, тому статичні характеристики синхронного двигуна по реактивній потужності залежать від закону регулювання напруги у вузлі навантаження, до якого він приєднаний. В цілому синхронні двигуни мають позитивний регулюючий ефект як по активній, так і по реактивній потужності.

#### **Освітлювальне навантаження**

Установки електричного освітлення з лампами розжарювання, люмінесцентними, дуговими ртутними, натрієвими, ксеноновими застосовуються на всіх підприємствах для внутрішнього і зовнішнього освітлення, для побутових споживачів, потреб міського освітлення і так далі

Лампи розжарювання випромінюють світло за рахунок свічення нитки розжарення при великій температурі. При цьому значна частина споживаною лампами розжарювання енергії витрачається на перетворення на теплову енергію. Якщо вважати опір  $R$  нитки розжарення незмінним, а індуктивним опором нехтувати, то активна потужність лампи буде пропорційна квадрату підведеної напруги:

$$P(U) = \frac{U^2}{R}. \quad (15.1)$$

Проте із зміною струму, що протікає по нитці розжарення, її температура і опір міняються: із збільшенням струму росте температура і збільшується опір нитці і, навпаки, при зниженні напруги нитка остигає і опір знижується.

Експериментально встановлено, що споживана лампами розжарювання потужність пропорційна напрузі в ступені 1,5.1,6. Реактивна потужність лампами розжарювання практично не споживається.

Люмінесцентні лампи менш чутливі до відхилень напруги. При підвищенні напруги споживана потужність і світловий потік збільшуються, а при зниженні – зменшуються, але не в такому ступені, як у ламп розжарювання. Проте при зниженні напруги на люмінесцентних лампах до величини  $0,9U_{ном}$  вони починають мерехтіти, а при величині напруги  $0,8U_{ном}$  просто не спалахують. Регулюючий ефект люмінесцентних ламп по схемі з розщепленою фазою рівний приблизно 1,9 для активної потужності, а для реактивної потужності може бути оцінений величиною 1,5.

### **Печі опору**

Вони мають характеристики, схожі з характеристиками ламп розжарювання.

### **Дугові печі**

Дугові печі є складним і важким навантаженням для енергомережі – це крупний несиметричний і у високому ступені нестабільний споживач по реактивній потужності. Флуктуації реактивної потужності, особливо виражені на стадії розплаву, приводять до падінь напруги, що зменшують активну потужність, що поступає до електропечі і інших електричних навантажень, приєднаних до тих же шин розподільного пристрою. Активна потужність, споживана піччю, міняється пропорційно квадрату напруги.

### **Компенсуючі пристрої**

Пристрої типу індуктивності і ємкості мають квадратичні залежності реактивної потужності від напруги (якщо їх реактивні опори постійні). Ємкісне навантаження має негативний регулюючий ефект.

Більшість компенсуючих пристроїв в даний час випускаються з регулюючими пристроями, т. е. при зміні напруги на шинах, де підключені компенсуючі пристрої, останні змінюють свою потужність відповідно до закону регулювання. Найчастіше компенсуючі пристрої стабілізують напругу, т. е. підтримують його на заданому рівні, що еквівалентно позитивному регулюючому ефекту.

## **15.2 Моделювання електричних навантажень**

Статичні характеристики для кожного типу електричного навантаження і їх сукупностей можуть бути отримані експериментально. Проте у кожному конкретному випадку це скрутно і найчастіше користуються так званими типовими характеристиками. Так, наприклад, можна виділити статичні характеристики асинхронних двигунів малої, середньої і великої потужності або статичні характеристики певного складу змішаного навантаження.

Отримані по таких навантаженнях статичні характеристики узагальнюються і представляються у вигляді математичних моделей. У загальному випадку статичні характеристики навантаження по напрузі можуть бути представлені у вигляді:

$$P(U) = P_0 P_*(U) = P_0 \left[ a_P \left( \frac{U}{U_{\text{НОМ}}} \right)^2 + b_P \left( \frac{U}{U_{\text{НОМ}}} \right) + c_P \right];$$

$$Q(U) = Q_0 Q_*(U) = Q_0 \left[ a_Q \left( \frac{U}{U_{\text{НОМ}}} \right)^2 + b_Q \left( \frac{U}{U_{\text{НОМ}}} \right) + c_Q \right].$$
(15.2)

де  $P_0$  і  $Q_0$  – активна і реактивна потужності навантаження при номінальній напрузі;  $P_*(U)$  і  $Q_*(U)$  – статичні характеристики навантажень у відносних одиницях;  $U_{\text{НОМ}}$  – номінальна напруга навантаження або мережі;  $a_P$ ,  $a_Q$ ,  $b_P$ ,  $b_Q$ ,  $c_P$  і  $c_Q$  – коефіцієнти (параметри) моделей, отримані в результаті обробки експериментальних даних.

Таблиця 15.1 – Середні статичні характеристики приблизно відповідають наступному складу навантаження, %:

№	Найменування	Навантаження, %
1	Крупні асинхронні двигуни	15
2	Дрібні асинхронні двигуни	35
3	Крупні синхронні двигуни	9
4	Печі і ртутні випрямлячі	11
5	Освітлення і побутове навантаження	22
6	Втрати в мережах	8

Зазвичай приймається  $a_P = 0$ , т. е. лінійна залежність активного навантаження від напруги. Коефіцієнти  $b_P$  і  $c_P$  в залежно від характеристики вузла навантаження приведені в таблиці.

Таблиця 15.2 – Значення коефіцієнтів  $b_P$  і  $c_P$

Характер навантаження	Статичні характеристики					
	пологі		середні		круті	
	$b_P$	$c_P$	$b_P$	$c_P$	$b_P$	$c_P$
Переважають крупні промислові підприємства	0,3	0,7	0,6	0,4	0,9	0,1
В середньому	0,4	0,6	0,9	0,1	1,4	-0,4
Крупних промислових підприємств немає	0,9	0,1	1,2	-0,2	1,5	-0,5

Коефіцієнти  $a_Q$ ,  $b_Q$  і  $c_Q$  залежно від коефіцієнта потужності приведені в (табл. 15.3).

Таблиця 15.3 – Значення коефіцієнтів  $a_Q$ ,  $b_Q$  і  $c_Q$

Коефіцієнт потужності	Статичні характеристики								
	пологі			середні			круті		
	$a_Q$	$b_Q$	$c_Q$	$a_Q$	$b_Q$	$c_Q$	$a_Q$	$b_Q$	$c_Q$
0,83...0,87	10	-18	9	9,6	-15,3	6,7	10	-14,4	5,4
0,88...0,90	11,9	-21,8	10,9	11,4	-18,5	8,1	11,9	-17,4	6,5
0,91...0,93	14,1	-26,2	13,1	13,5	-22,2	9,7	14,1	-21	7,9

Моделювання електричних навантажень статичними характеристиками по напрузі в розрахунках сталих режимів вважається найбільш точним способом обліку споживаної потужності навантаження. Проте для отримання дійсних статичних характеристик потрібні експериментальні дослідження, а для підбору типових статичних характеристик повинен бути відомий склад навантаження, який може сильно змінюватися в часі. Крім того, в цьому випадку в розрахунках неодмінно слід враховувати дію регуляторів напруги, що значно ускладнює підготовку даних і вимагає знання законів регулювання.

Тому в більшості випадків користуються найпростішою моделлю навантаження – постійними значеннями активної і реактивної потужності:  $P = \text{const}$ ,  $Q = \text{const}$ .

У деяких завданнях, в яких виконуються розрахунки сталих режимів, струмів короткого замикання в електричній мережі або розрахунки стійкості ЕЕС, навантаження прийнято представляти схемами заміщення. Таке уявлення є точним в тому випадку, якщо для навантаження відомі її статичні характеристики і величина підведеної напруги. У інших випадках такі моделі є наближеними.

Розглянемо електричний ланцюг, в якому є навантаження, представлене у вигляді опору  $Z_H$ . Це опір в загальному випадку є змінним величиною – виходить нелінійний електричний ланцюг. Навіть якщо рахувати потужність, споживану навантаженням, постійним, опір мінятиметься залежно від напруги по формулі:

$$Z_H = \frac{U_H^2}{S_H^*}. \quad (15.3)$$

Крім того, потужність також залежить від напруги по статичній характеристиці і тому:

$$\underline{Z}_H = \frac{U_H^2}{P_H(U_H) - jQ_H(U_H)}. \quad (15.4)$$

Навантаження може бути представлена у вигляді двох схем заміщення: з послідовним і паралельним з'єднанням елементів (рис. 15.1).

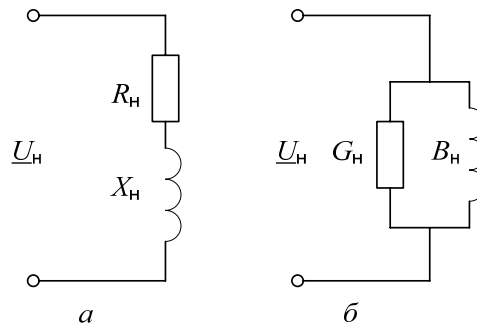


Рисунок 15.1 – Схеми заміщення навантаження

При послідовному з'єднанні:

$$\underline{Z}_H = \frac{U_H^2}{\underline{S}_H^*} = \frac{U_H^2}{S_H} (\cos \varphi + j \sin \varphi) = R_H + jX_H, \quad (15.5)$$

а при паралельному:

$$\underline{Y}_H = \frac{\underline{S}_H^*}{U_H^2} = \frac{S_H}{U_H^2} (\cos \varphi - j \sin \varphi) = G_H - jB_H. \quad (15.6)$$

При постійній величині заданого опору або провідності моделювання за допомогою виразів (15.5) і (15.6) дає характеристики:

$$P_H(U_H) = \frac{S_H^2}{U_H^2} R_H, \quad Q_H(U_H) = \frac{S_H^2}{U_H^2} X_H, \\ P_H(U_H) = U_H^2 G_H, \quad Q_H(U_H) = U_H^2 B_H. \quad (15.7)$$

Моделювання постійним опором дає зворотну квадратичну залежність від напруги, а постійною провідністю – залежність пропорційно квадрату напруги. Друга модель добре узгоджується з моделлю статичної характеристики реактивної потужності навантаження (15.7), тому для реактивної потужності цілком прийнятна. Для активної потужності можна, наприклад, скористатися лінійною моделлю, тоді матимемо:

$$P_H(U_H) = U_H U_{\text{ном}} G_H, \quad Q_H(U_H) = U_H^2 B_H, \quad (15.8)$$

де  $G_H$  і  $B_H$  – обчислені при номінальній напрузі навантаження.

На рисунку 15.2 представлені дійсні статичні характеристики навантаження (суцільні лінії) і характеристики, отримані по моделях (15.8) – пунктирні лінії.

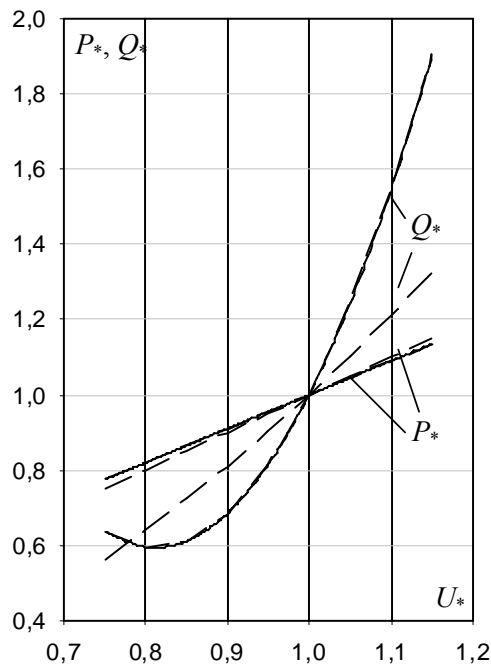


Рисунок 15.2. – Дійсні статичні характеристики навантаження і залежності потужностей від напруги при моделюванні навантаження схемою заміщення

Іноді як даних по навантаженню бувають відомі зміряні струми навантаження. Приймаючи яке-небудь значення коефіцієнта потужності навантаження, її можна моделювати постійними значеннями струмів  $I_H$ :

$$\begin{aligned} P_H(U_H) &= \sqrt{3} \cdot U_H I_H \cos \varphi; \\ Q_H(U_H) &= \sqrt{3} \cdot U_H I_H \sin \varphi, \end{aligned} \quad (15.9)$$

що дає лінійні статичні характеристики як активної, так і реактивної потужності. Такі моделі навантаження використовуються в низьковольтних мережах і мережах середньої напруги.

Всі математичні моделі електричних навантажень, розглянуті вище, зведені в таблиці 15.4.

Таблиця 15.4 — Математичні моделі електричних навантажень

Математичні моделі	Потужність навантаження	Примітки
Статичні характеристики навантаження по напрузі	$P_H = \varphi(U_H), \quad Q_H = \psi(U_H)$	Виходять за даними експерименту або підбором типових характеристик
Постійні значення потужності навантаження	$P_H = \text{const}, \quad Q_H = \text{const}$	
Схема заміщення: $\underline{Y}_H = G_H - jB_H = \text{const}$	$P_H = U_H^2 G_H$ или $P_H = U_H U_{\text{ном}} G_H,$ $Q_H = U_H^2 B_H$	$\underline{Y}_H = \frac{S_{H0}}{U_{\text{ном}}^2} (\cos \varphi - j \sin \varphi)$
Схема заміщення: $\underline{Z}_H = R_H + jX_H = \text{const}$	$P_H(U_H) = \frac{S_{H0}^2}{U_H^2} R_H,$ $Q_H(U_H) = \frac{S_{H0}^2}{U_H^2} X_H$	$\underline{Z}_H = \frac{U_{\text{ном}}^2}{S_{H0}} (\cos \varphi + j \sin \varphi)$
Постійне значення струму навантаження: $I_H = \text{const}$ ( $\varphi = \text{const}$ )	$P_H = \sqrt{3} \cdot U_H I_H \cos \varphi,$ $Q_H = \sqrt{3} \cdot U_H I_H \sin \varphi$	$I_H = \frac{S_{H0}}{\sqrt{3} U_{\text{ном}}}$

Примітка. У всіх формулах  $S_{H0}$  – повна потужність навантаження, яке може бути прийнята рівній номінальній або максимальній потужності, а також потужності деякого початкового або початкового режиму роботи електроприймача або споживача.

**Приклад.** Знайти коефіцієнти статичної характеристики навантаження за досвідченими даними для активної і реактивної потужності і визначити їх регулюючі ефекти.

Використовуємо лінійну модель для активної потужності і параболу для реактивної потужності. Побудову характеристик виконаємо в Mathcad.

Всі величини приведені у відносних одиницях.

Початкові дані (результати експерименту):

$$D := \begin{pmatrix} 0.82 & 0.82 & 0.61 \\ 0.86 & 0.86 & 0.69 \\ 0.91 & 0.93 & 0.79 \\ 0.95 & 0.96 & 0.90 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1.05 & 1.04 & 1.13 \\ 1.09 & 1.09 & 1.27 \\ 1.14 & 1.13 & 1.41 \end{pmatrix} \quad U := D^{(0)} \quad P := D^{(1)} \quad Q := D^{(2)}$$

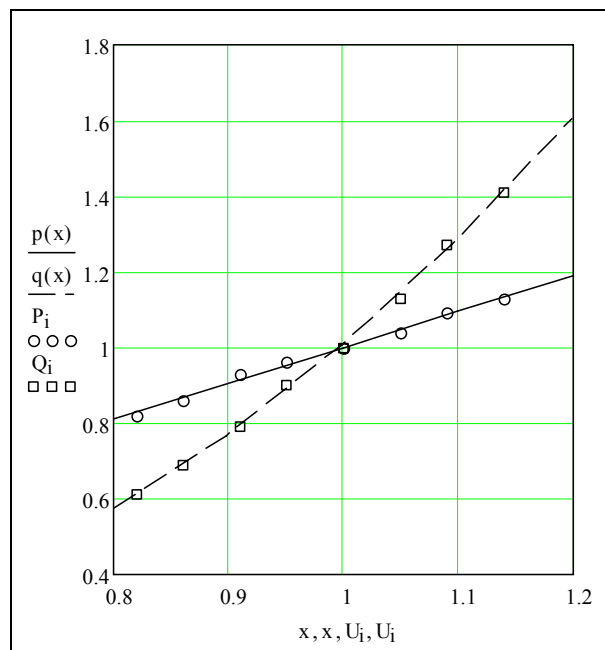
Коефіцієнти функції поліноміальної регресії:

$$\text{vsp} := \text{regress}(U, P, 1) \quad \text{vsp} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \\ 0.045 \\ 0.955 \end{pmatrix} \quad \text{vsq} := \text{regress}(U, Q, 2) \quad \text{vsq} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \\ 0.539 \\ -1.643 \\ 2.112 \end{pmatrix}$$

Визначення функцій статичних характеристик і аргументів:

$$\begin{array}{ll} p(x) := \text{interp}(\text{vsp}, U, P, x) & x := 0.8, 0.9 \dots 1.2 \\ q(x) := \text{interp}(\text{vsq}, U, Q, x) & i := 0 \dots 7 \end{array}$$

Графіки статичних характеристик (на графіці окремими маркерами нанесені експериментальні дані):

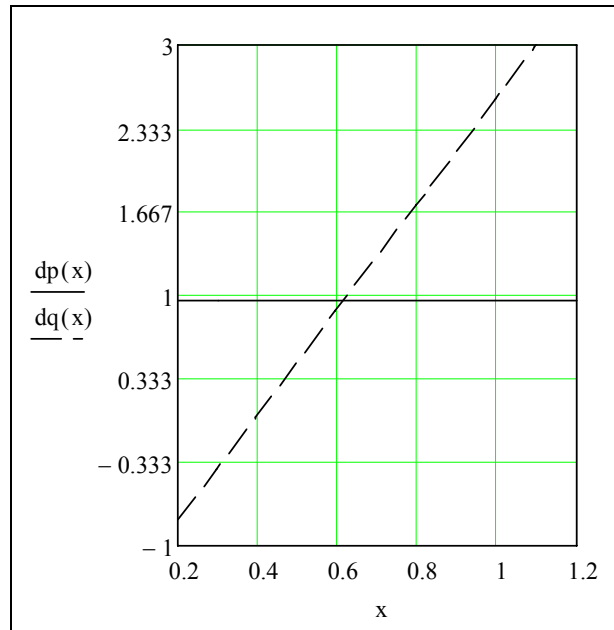


Регулюючі ефекти:



$$dp(x) := \frac{d}{dx}p(x) \quad dp(1) = 0.955 \quad dq(x) := \frac{d}{dx}q(x) \quad dq(1) = 2.582$$

Зміна регулюючих ефектів:



Регулюючий ефект активної потужності не міняється, оскільки модель статичної характеристики була прийнята лінійною.

### Контрольні питання:

1. Що таке статичні характеристики навантаження?
2. Що таке регулюючий ефект навантаження?
3. Які існують основні види електричних навантажень?
4. Які навантаження не споживають реактивної потужності?
5. Який регулюючий ефект мають печі опору і лампи розжарювання?
6. Як змінюється регулюючий ефект по реактивній потужності асинхронного двигуна при зниженні напруги?
7. Які математичні моделі використовуються для моделювання електричного навантаження в сталих режимах?
8. Що таке типові статичні характеристики?
9. Які схеми заміщення використовуються для моделювання навантаження?

## ГЛОСАРІЙ

**Аналіз чутливості.** Визначення ступеня дії, що надається (незначним) зміною зовнішній змінній на іншу змінну

**Аналогова модель.** Аналогова модель представляє досліджуваний об'єкт аналогом, який поводить як реальний об'єкт, але не виглядає як такий.

**Висхідне моделювання.** Побудова кількісної моделі, при якій змінні, параметри і математичні зв'язки між ними оцінюються на підставі аналізу наявних даних.

**Внутрішні змінні.** Кількісні змінні, значення яких визначаються усередині символічної моделі, виходу символічної моделі.

**Дані.** Числові дані, які кількісно відображають взаємозв'язки чинників управлінської ситуації.

**Детермінована модель.** Модель, в якій всі дані достовірно відомі. Лінійне програмування. Детермінована модель, що складається з лінійних рівнянь і нерівностей і одного показника ефективності (цільовій функції), який потрібно оптимізувати за наявності заданого набору обмежень. Методи управління Систематичне застосування процесу моделювання в управлінських ситуаціях.

**Зовнішні змінні.** Кількісні змінні, значення яких визначаються поза символічною моделлю, входи символічної моделі.

**Імовірнісна модель.** Модель, в якій деякі дані не є достовірно відомими, їх невизначеність описується за допомогою імовірнісних розподілі.

**Модель «чорного ящика».** Неповна символічна модель, в якій визначені тільки змінні входу і виходу, а математичні зв'язки не виявлені.

**Модель рішення.** Символічна модель, в якій існують змінні рішення і хоч би один показник ефективності.

**Низхідне моделювання.** Побудова символічної моделі, при якій змінні, параметри і математичні зв'язки між ними визначаються на підставі раніше отриманих знань.

**Параметр.** Зовнішня змінна, значення якої не залежить від рішень, що приймаються менеджером, а визначається зовнішнім середовищем.

**Підтримка ухвалення рішень.** Процес використання даних, моделей і результатів їх аналізу для отримання інформації, що допомагає при ухваленні рішень.

**Показник ефективності** (критерій, цільова функція). Внутрішня змінна, що дозволяє визначити, наскільки модель близька до мети.

**Постановка проблеми.** Виявлення можливих рішень і метод вимірювання їх ефективності.

**Процес моделювання.** Ітеративний процес абстрагування, побудови моделі, її аналізу і інтерпретації, доповнений інтуїцією і думками менеджера, покликаний сприяти ухваленню рішень.

Результуюча змінна. Внутрішня змінна, що поставляє додаткову інформацію, яка покликана допомогти менеджерові в інтерпретації результатів моделі.

**Рішення** (змінна рішення) Зовнішня змінна, значення якої контролює і визначає менеджер, що ухвалює рішення.

**Символічна модель** (кількісна модель). Модель, що використовує дані, змінні і математичні зв'язки для представлення абстрактних ситуацій (наприклад, модель економіки певної країни).

**Структуризація.** Мистецтво переходу від ознак (ситуативних чинників) до чіткої постановки проблеми.

**Фізична модель.** Модель, подібна до моделі літака, компонентами якої є фізичні артефакти, що володіють дійсними властивостями модельованої суті.

## СПИСОК ДЖЕРЕЛ

1. Дюк В. А. Обработка данных на ПК в примерах. — СПб: Питер, 1997.
2. Чубукова И. А.. — М.: Интернет-университет информационных технологий: БИНОМ: Лаборатория знаний, 2006. — 382 с.
3. Айвазян С. А., Бухштабер В. М., Юнюков И. С., Мешалкин Л. Д. Прикладная статистика: Классификация и снижение размерности. — М.: Финансы и статистика, 1989.
4. Knowledge Discovery Through Data Mining: What Is Knowledge Discovery? — Tandem Computers Inc., 1996.
5. Кречетов Н. Продукты для интеллектуального анализа данных. — Рынок программных средств, № 14–15, 1997, С. 32–39.
6. Дюк В. А. Обработка данных на ПК в примерах. — СПб: Питер, 1997.
7. Дюк В., Самойленко А. Data Mining: учебный курс (+CD).. — СПб: Изд. Питер, 2001. — 368 с.
8. Чубукова И. А.. — М.: Интернет-университет информационных технологий: БИНОМ: Лаборатория знаний, 2006. — 382 с.
9. Гмурман В. Е Теория вероятностей и математическая статистика. М., «Высшая школа», 1977
10. Гмурман В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. М., «Высшая школа», 1975
11. Румшицкий Л. З. Элементы теории вероятностей, М., «Наука», 1976
12. Мышкис А. Д. Лекции по высшей математике, М., «Наука», 1973
13. Гребеник В. Д., Рухляда В. С., Скрипко Е. Д. Программа, методические указания и контрольные задания по курсу «Теория вероятностей», ХИИКС, 1988.
14. Самарский А. А., Гулин А. В. Численные методы 1989 г.
15. Костомаров Д. П., Фаворский А. П. Вводные лекции по численным методам
16. Березин, И. С. Методы вычислений/ И. С. Березин, Н. П. Жидков. Т. 1. — М.: Наука, 1966.
17. Крылов, В. И. Начала теории вычислительных методов. Интерполирование и интегрирование / В. И. Крылов, В. В. Бобков, П. И. Монастырский. Т. 1. -- Минск: Наука и техника, 1983.
18. Крылов, В. И. Вычислительные методы высшей математики/ В. И. Крылов, В. В. Бобков, П. И. Монастырский. Т. 1. — М: Наука, 1976.

19. Мысовских, И. П. Лекции по методам вычислений/ И. П. Мысовских. – М.: Наука, 1993.

20. Владимирова Л. П. Прогнозирование и планирование в условиях рынка: Учеб. пособие. М.: Издательский Дом «Дашков и Ко», 2001;

21. Слуцкий Л. Н. Курс МБА по прогнозированию в бизнесе. М.: Альпина Бизнес Букс, 2006.

22. Дьяконов В. П. Вейвлеты. От теории к практике. – М.: СОЛОН-Р, 2002. – 448 с.

23. Корн Г., Корн Е. Справочник по математике для научных работников и инженеров. – М.: Наука, 1984.

*Навчальне видання*

**КАРПАЛЮК** Ігор Тимофійович

**КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ**

з курсу

**МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ І МЕТОДИ  
В ЕЛЕКТРОЕНЕРГЕТИЦІ**

*(для студентів 4 курсу денної та заочної форм навчання  
за напрямом 6.050701 – Електротехніка та електротехнології  
та слухачів другої вищої освіти за спеціальністю  
7.05070103 – Електротехнічні системи електроспоживання)*

Відповідальний за випуск *П. П. Рожков*

За авторською редакцією

Комп'ютерне верстання: *І. Т. Карпалюк*

План 2014, поз. 93 Л

---

Підп. до друку 19.03.2015

Друк на різнографі.

Зам. №

Формат 60 x 84/16

Ум. друк. арк. 10,7

Тираж 50 пр.

Видавець і виготовлювач:

Харківський національний університет  
міського господарства імені О. М. Бекетова,  
вул. Революції, 12, Харків, 61002

Електронна адреса: [rectorat@kname.edu.ua](mailto:rectorat@kname.edu.ua)

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи:

ДК 4705 від 28.03.2014 р.